

בגרות לבתי ספר על-

יסודיים

מועד הבחינה : חורף תשס"ח 2008

מספר השאלון : 035005

נספח: דפי נוסחאות ל- 4 ול- 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ה'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה : שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה : בשאלון זה שני פרקים.
 פרק ראשון - אלגברה
 $33\frac{1}{3}$ נקודות. - $33\frac{1}{3} \times 1$ -
 פרק שני - הנדסת המישור והסתברות
 $66\frac{2}{3}$ נקודות. - $33\frac{1}{3} \times 2$ -

 סה"כ - 100 נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש :
 1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
 שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות :
 1. אל תעתיק את השאלה ; סמן את מספרה בלבד.
 2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
 הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
 חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
 שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
בהצלחה !

פרק א': אלגברה: (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור אחת מהשאלות 1 – 2.

1. נתונה הפרבולה $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2$, $m \neq \pm 1$.

א. מצא עבור אילו ערכים של m הפרבולה נמצאת כולה מעל לישר $y = 1$.

ב. מצא עבור אילו ערכים של m הפרבולה חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות, הנצאות מעל לראשית הצירים.

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = x \cdot a_n - 8 \end{cases}$$

ידוע כי הסדרה b_n , המוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n - 4$, היא סדרה הנדסית שהמנה שלה 3.

א. חשב את x .

עבור ה- x שחישבת בסעיף א מצא:

ב. נוסחה לאיבר כללי בסדרה b_n .

ג. נוסחה לאיבר כללי בסדרה a_n .

ד. נוסחה עבור בכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

פרק ב': הנדסת המישור והסתברות (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור שתיים מהשאלות 3 – 6.

מהן מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

הנדסת המישור

3. ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

גובה הטרפז, AH, חותך את

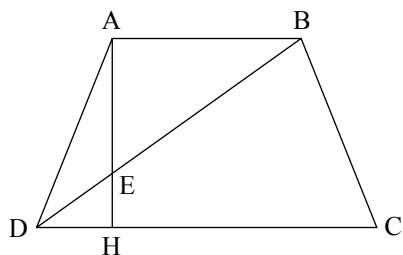
האלכסון BD בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $AD = AB = BC = a$

$CD = 2a$

א. חשב את היחס $\frac{AE}{EH}$. נמק.

ב. הבע באמצעות a את האורך של AE.



4. נתון משולש שווה צלעות ABC.

E היא נקודה על הצלע BC.

על הקטע EC בנו משולש שווה צלעות ECD.

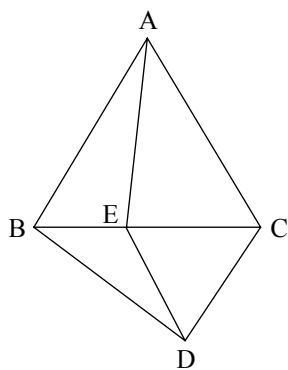
המשך AE חותך את BD בנקודה H (ראה ציור).

הוכח:

א. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$

ב. $\angle EAC = \angle HED$

ג. אם $HE = HD$ אז $AE \perp BC$



שימו לב: מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6.
נוסחאות בהסתברות נמצאות בעמוד הבא.

הסתברות

5. בכד I יש 6 כדורים שחורים ו-4 כדורים לבנים.
 בכד II יש 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים.
 דנה מוציאה 5 פעמים כדור מכד II באופן הזה: היא מוציאה כדור באקראי ומחזירה אותו לכד, ושוב מוציאה כדור באקראי ומחזירה אותו לכד, וכן הלאה.
 א. מהי ההסתברות שדנה תוציא מכד II כדור שחור בדיוק 3 פעמים?
 דנה זורקת קובייה. אם מתקבל בקובייה מספר קטן מ-2 או שווה ל-2, היא בוחרת בכד I.
 אם מתקבל בקובייה מספר גדול מ-2 היא בוחרת בכד II.
 מהכד שנבחר דנה מוציאה 5 פעמים כדור באופן שתואר למעלה.
 ב. מהי ההסתברות שדנה תוציא כדור שחור בדיוק 3 פעמים?
 ג. ידוע כי דנה הוציאה כדור שחור בדיוק 3 פעמים.
 מהי ההסתברות שבקובייה התקבל מספר גדול מ-2?

חשיבה הסתברותית בחיי יום יום.

6. בעיר מסויימת 20% מהאופנועים הם ירוקים ו-80% מהאופנועים הם כחולים.
 בתאונת "פגע וברח" שהתרחשה בשעת לילה היא מעורב אופנוע.
 עד ראייה שנכח במקום טען בעדותו שהאופנוע הפוגע היה ירוק.
 במבחנים שנערכו לעד נמצא כי בתנאי הראייה ששררו בזמן התאונה, הוא מזהה נכון את צבע האופנוע ב-75% מהמקרים (כלומר, מבין האופנועים הכחולים הוא מזהה 75% ככחולים, ומבין האופנועים הירוקים הוא מזהה 75% כירוקים).
 א. מצא את היחס בין ההסתברות שהאופנוע הפוגע הוא אכן ירוק כאשר נתונה העדות של עד הראייה, ובין ההסתברות שהאופנוע הוא דווקא כחול כאשר נתונה העדות של עד הראייה.
 ב. מצא את ההסתברות שהאופנוע הפוגע אכן ירוק כאשר נתונה העדות של עד הראייה.
 ג. אילו היחס בין מספר האופנועים הירוקים למספר האופנועים הכחולים בעיר היה גדול מ- $\frac{20}{80}$, האם ההסתברות שטענת העד היא נכונה הייתה גדולה מההסתברות שמצאת בסעיף ב או קטנה ממנה? נמק.

בהצלחה

תשובות:

1. א. $m > 1$

ב. $-3 < m < -1$

2. א. $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

ב. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

ג. $S_n = 3^n - 1 + 4n$

3. א. 2

ב. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

4. א. הוכחה

ב. הוכחה

ג. הוכחה

5. א. 0.2304

ב. 0.2688

ג. $\frac{4}{7}$

6. א. 0.75

ב. $P = \frac{3}{7}$

ג. גדולה. ככל ש- $P(A)$ גדל גם $P(A/B)$ גדל.

פתרונות מלאים 005:

$$\text{שאלה 1: } (m^2 - 1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$$

תנאי 1: $\Delta < 0$

$$4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) < 0$$

$$4(m^2 - 2m) + 1 - 4m^2 + 4 < 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 4 < 0$$

$$-8m + 8 < 0$$

$$8 < 8m$$

$$1 < m$$

תנאי 2: $m^2 - 1 > 0$ פרבולה מחייכת

$$m > 1 \text{ או } m < -1$$

חיתוך שני התנאים:

תשובה סופית ל-א': $m > 1$.

ב. התנאים עבור שני שורשים שליליים:

$$\Delta > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0$$

$$\frac{-b}{a} < 0$$

$$\Delta > 0$$

$$4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) \cdot 2 > 0$$

$$4(m^2 - 2m + 1) - 8m^2 + 8 > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 8m^2 + 8 > 0$$

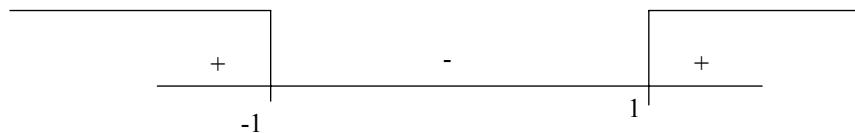
$$-4m^2 - 8m + 12 > 0$$

$$-m^2 - 2m + 3 > 0$$

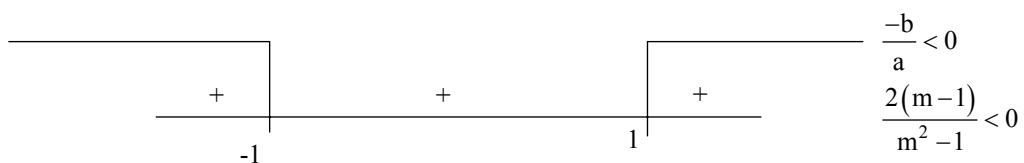
$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2}, \quad m = -3 \quad m = 1$$

תנאי 1: $-3 < m < 1$.

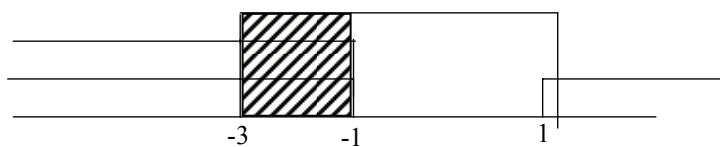
$$\frac{c}{a} > 0 \quad \frac{2}{m^2 - 1} > 0$$



תנאי 2: $m < -1$ או $m > 1$



חיתוך תנאים:



$$-3 < m < -1$$

שאלה 2:

א.

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = x \cdot a_n - 8 \end{cases}$$

זאת סדרה הנדסית : $b_n - 4$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 4}{a_n - 4} = 3$$

$$\frac{x \cdot a_n - 8 - 4}{a_n - 4} = 3$$

$$x \cancel{a_n} - \cancel{12} = 2a_n - \cancel{12}$$

$$\boxed{x = 3}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 8$$

ב.

$$q = 3$$

$$b_1 = a_1 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{b_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$$

$$b_n = a_n - 4$$

ג.

$$2 \cdot 3^{n-1} = a_n - 4$$

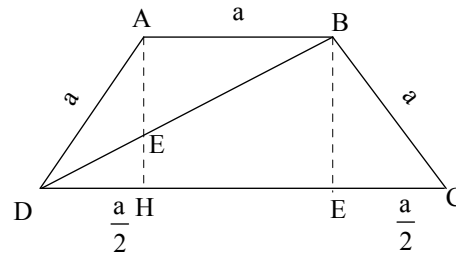
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$

זאת סדרה הנדסית ולכן נשתמש בנוסחה עבור סכום סדרה הנדסית.

$$S_{b_n} = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{2(3^n - 1)}{2} = 3^n - 1$$

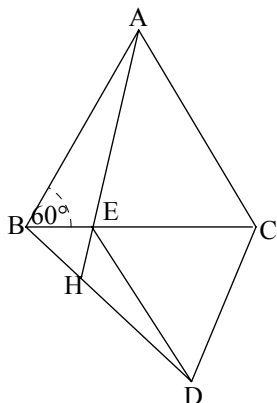
$$S_n = \frac{\cancel{2}(3^n - 1)}{\cancel{2}} + 4n = \boxed{3^n - 1 + 4n}$$

שאלה 3:



נימוק	טענה	
נתון.	ABCD טרפז שווה שוקיים	1.
נתון.	$AD = AB = BC = a$	2.
	$CD = 2a$	3.
	$DH = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a}{2}$	4.
בין ישרים מקבילים זוויות מתחלפות שוות	$\angle BDC = \angle ABD$	5.
	$\angle AHD = \angle HAD = 90^\circ$	6.
לפי משפט דמיון ז.ז.	$\triangle DEH \sim \triangle BEA$	7.
במשולשים דומים היחס בין הצלעות שווה.	מ.ש.ל א' $\frac{AE}{EH} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$	8.
משפט פתגורס.	$AH^2 + DH^2 = AD^2$ $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ $AH^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ $AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	9.
לפי הנתון בסעיף א'	$AE = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ מ.ש.ל ב'	10.

שאלה 4:



טענה	נימוק	
1. $AC = BC$	נתון	
2. $EC = DC$	נתון	
3. $\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ$ $\Downarrow$	$\triangle ABC$ ו- $\triangle ECD$ הינם משולש שווה צלעות.	
4. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$	לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.	
5. נסמן: $\angle EAC = \alpha$		
6. $\angle AEC = 180 - 60 - \alpha = 120 - \alpha$	סכום זוויות במשולש שווה ל- 180°	
7. $\angle EAC = \angle CBD = \alpha$	במשולשים חופפים זוויות שוות בהתאמה.	
8. $\angle BEH = \angle AEC = 120 - \alpha$	זוויות קודקודיות שוות.	
9. $\angle BHE = 180 - \alpha - 120 + \alpha = 60^\circ$	סכום זוויות במשולש שווה ל- 180°	
10. $\angle EHD = 180 - 60 = 120^\circ$	סכום זוויות צמודות שווה ל- 180°	
11. $\angle CED = 60^\circ$	$\triangle EDC$ שווה צלעות.	
12. $\angle HED = 180 - 60 - 120 + \alpha = \alpha$	זווית שטוחה שווה ל- 180° .	
13. $\angle HED = \angle EAC$	כלל המעבר.	
14. $HE = HD$	נתון עבור סעיף ג'	
15. $\triangle HED$ שווה צלעות	משולש בו השוקיים שוות הוא מש"ש.	
16. $\angle HED = \angle HDE = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$	זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.	
17. $\angle AEC = 30^\circ$	הצבה.	
18. $\angle AEC = 180 - 60 - 30 = 90^\circ$	סכום הזוויות במשולש שווה ל- 180° .	

שאלה 5:

א.

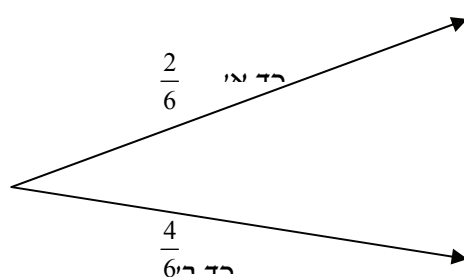
$$n = 5$$

$$k = 3$$

$$P(\text{כדור שחור}) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(\text{בדיוק 3 כדורים שחורים מ-5}) = \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2 = 10 \cdot (0.4)^3 (0.6)^2 = 0.2304$$

ב.



$$P(\text{בדיוק 3 שחורים מ-5}) = \frac{2}{6} P(\text{בדיוק שלוש כדורים שחורים מא'}) + \frac{4}{6} P(\text{בדיוק 3 שחורים מ-5})$$

$$P(\text{בדיוק שלוש כדורים שחורים}) = \binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^2 = 0.3456$$

$$\frac{2}{6} \cdot 0.3456 + \frac{4}{6} \cdot 0.2304 = \boxed{0.2688} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים/מספר גדול מ-2}) = P(\text{ידוע/מבוקש})$$

$$\frac{P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים} \cap \text{מספר גדול מ-2})}{P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים})}$$

$$= \frac{\frac{4}{6} \cdot 0.2304}{0.2688} = \frac{4}{7}$$

פתרון שאלה 6 :

A - אופנוע ירוק.

B - קובע שהאופנוע ירוק.

$\bar{A}$ - אופנוע כחול.

$\bar{B}$ - קובע שהאופנוע כחול.

נתון : $P(A) = 0.2$

ולכן $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$

כמו כן נתון : $P(B/A) = P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.75$

ננתח נתונים אלה לפי נוסחת ההסתברות המותנית :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.2} = 0.75 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{0.8} = 0.75 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6$$

נבנה טבלה דו-מימדים :

	$\bar{A}$	A	
0.35	0.2	0.15	B
0.65	0.6	0.05	$\bar{B}$
1	0.8	0.2	

$$\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(\bar{A} \cap B)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75 \quad \text{א.}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7} \quad \text{ב.}$$

ג. גדולה . ככל ש- $P(A)$ גדול גם $P(A/B)$ גדל.