

בגרות לבתי ספר על-

יסודיים

מועד הבחינה : מועד חורף – תשס"ח 2008

מספר השאלון : 035004

נספח: דפי נוסחאות ל- 4 ול- 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ד'

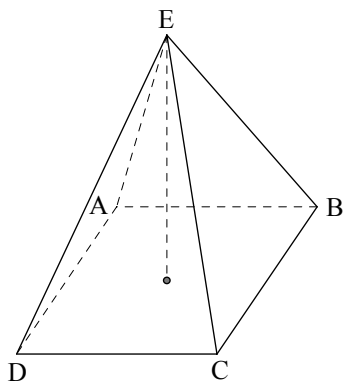
הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה : שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה : בשאלון זה שני פרקים.
 פרק ראשון - אלגברה
 $33\frac{1}{3} \times 1$ - $33\frac{1}{3}$ נקודות.
 פרק שני - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,
 $33\frac{1}{3} \times 2$ - $66\frac{2}{3}$ נקודות.
 טריגונומטריה

 סה"כ - 100 נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש :
 1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
 שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות :
 1. אל תעתיק את השאלה ; סמן את מספרה בלבד.
 2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
 הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
 חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
 שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
בהצלחה!

פרק א': אלגברה: (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור אחת מהשאלות 1 – 2.



1. EABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע (ראה ציור).

נתון: אורך הצלע של בסיס הפירמידה הוא $2a$,

זווית הראש בכל פאה היא 2α ,

הזווית בין פאה צדדית לבסיס הפירמידה

היא 58° .

א. חשב את הזווית α .

ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos 2x + 2x \cdot \sin 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. כמה נקודות חיתוך עם ציר ה- x יש לגרף הפונקציה בתחום הנתון? נמק.

פרק ב': חשבון דיפרנציאלי (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.

3. בתרבית אחת היו בשעה 08^{00} בבוקר 32,000 חיידקים, ובשעה 10^{00} היו בתרבית 38,720 חיידקים.

בתרבית שנייה היו בשעה 08^{00} בבוקר 8,000 חיידקים, ובשעה 10^{00} היו בתרבית 11,520 חיידקים.

בכל אחת מהתרביות הגידול הוא מעריכי.

א. באיזו שעה בקירוב יהיה מספר החיידקים בתרבית הראשונה גדול פי 2 ממספר החיידקים בתרבית השנייה.

ב. בכמה אחוזים מספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 09^{00} גדול ממספר החיידקים שהיו בשתי התרביות יחד בשעה 08^{00} ?

4. א. פתור את המשוואה $(\ln x)^2 + \ln \frac{x}{e} = 3 + \ln(e^2 \cdot x^2)$

ב. פתור את האי שוויון $5^{2+x} - 0.2^{-1-x} > 0.8$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

5. בציור שלפניך מוצג גרף של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$.

הישר $y = -1$ חותך את גרף הפונקציה

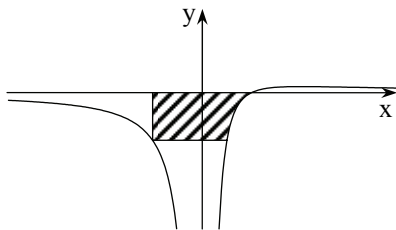
בנקודות A ו-B, כמתואר בציור.

דרך הנקודה A העבירו אנך

לציר ה-x.

מצא את השטח המוגבל על ידי הישר,

על ידי האנך, על ידי ציר ה-x ועל ידי גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



בהצלחה

תשובות:

1. א. $\alpha = 32.134^\circ$

ב. $\angle OBE = 48.53^\circ$

2. א. מינימום מוחלט: $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$

מקסימום מוחלט: $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

ב. נקודה אחת.

3. א. $x \approx 8$

ב. 12%

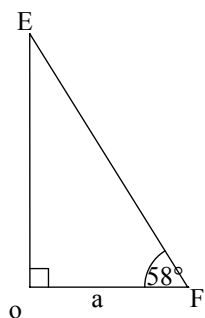
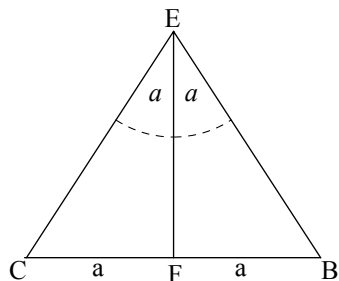
4. א. $x_1 = e^3, x_2 = e^{-2}$

ב. $x > -2$

5. $S = 3.31$

פתרונות מלאים :

א. ABCD הוא ריבוע.

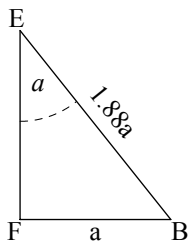


$$\cos 58 = \frac{a}{EF}$$

$$EF = \frac{a}{\cos 58} = 1.88a$$

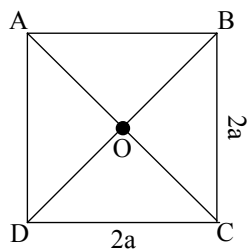
$$\tan 58 = \frac{EO}{a}$$

$$EO = a \cdot \tan 58 = 1.6a$$



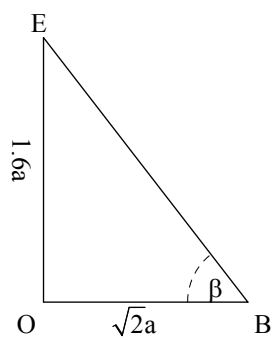
$$\sin \alpha = \frac{a}{1.88a}$$

$$\boxed{\alpha = 32.134^\circ}$$



$$DB^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2 \quad \text{ב.}$$

$$DB = \sqrt{8a} = 2\sqrt{2}a$$



$$OB = \frac{2\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a$$

$$\tan \beta = \frac{1.6a}{\sqrt{2}a}$$

$$\beta = 48.53^\circ$$

שאלה 2:

א. $f(x) = \cos(2x) + 2x \cdot \sin 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

$$u = 2x \quad v = \sin 2x$$

$$u' = 2 \quad v' = 2 \cos 2x$$

$$f'(x) = \cancel{-2 \sin 2x} + \cancel{2 \sin 2x} + 4x \cos 2x$$

$$4 \cos 2x = 0$$

$$4x = 0, \quad \cos 2x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{-\pi}{4} + \pi k$$

$$k = -1$$

$$k = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - \pi = \cancel{\frac{-3}{4}\pi}$$

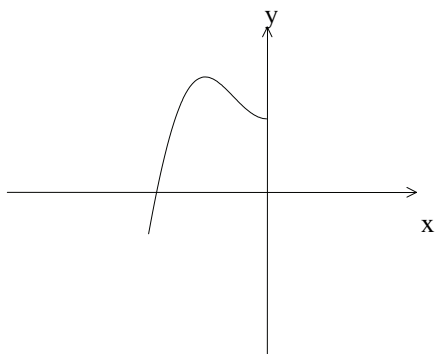
$$\boxed{x = \frac{-\pi}{4}}$$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0
y	-1	$\frac{1}{2}\pi$	1

מוחלט $\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{1}{2}\pi\right)$ max

מוחלט $\left(\frac{-\pi}{2}, -1\right)$ min

ב. ע"פ הגרף יש לפונקציה נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.



שאלה 3 :

תרבית I :

$$N = 32,000$$

$$a = ?$$

$$t = 2$$

$$y = 38,720$$

$$\Downarrow$$

$$32,000a^2 = 38,720$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = 1.1}$$

תרבית II :

$$N = 8000$$

$$a = ?$$

$$t = 2$$

$$y = 11,520$$

$$\Downarrow$$

$$11,520 = 8000a^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = 1.2}$$

$$32,000 \cdot 1.1^x = 16,000 \cdot 1.2^x$$

$$\left(\frac{1.2}{1.1}\right)^x = 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1.09} \Rightarrow x \approx 8$$

תשובה סופית x שווה בקירוב ל-8.

מספר החיידקים בשתי התרבויות בשעה 09:00 : $8000 \cdot 1.2 + 32,000 \cdot 1.1 = 44,800$ מספר החיידקים בשתי התרבויות בשעה 08:00 : $32,000 + 8,000 = 40,000$

$$\frac{44,800}{40,000} = 1.12$$

היחס בין מספר החיידקים בשעה תשע לשעה שמונה :

כמות החיידקים גדלה ב- 12%.



שאלה 4:

$$(\ln x)^2 + \ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3 + \ln(e^2 \cdot x^2)$$

א.

$$(\ln x)^2 + \ln x - \ln e = 3 + \ln e^2 + \ln x^2$$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 3 + 2\ln e + 2\ln x \quad \boxed{\ln x = t}$$

$$t^2 + t = 3 + 2 + 1 + 2t$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = -2$$

$$\ln x = 3 \quad \ln x = -2$$

$$x = e^3 \quad x = e^{-2}$$

$$5^{2+x} - 0.2^{-1-x} > 0.8$$

ב.

$$5^{2+x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1-x} > 0.8$$

$$5^2 \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x > 0.8$$

$$20 \cdot 5^x > \frac{0.8}{20}$$

$$5^x > \frac{1}{25}$$

$$5^x > 5^{-2}$$

$$x > -2$$

שאלה 5:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

הישר $y = -1$ חותך את גרף הפונקציה ב:

$$-1 = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$-x^2 = x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} =$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

חיתוך עם ציר ה- x $y = 0$:

$$0 = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x - 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\int_{-2}^1 -1 dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$\left. -1x \right|_{-2}^1 + \left. \ln x + \frac{2}{x} \right|_1^2$$

$$\left[-1(1) \right] - \left[-1(-2) \right] + \left[\ln 2 + \frac{2}{2} \right] - \left[\ln 1 + \frac{2}{1} \right]$$

$$-1 - 2 = -3$$

$$[1.69] - [2] = -0.31$$

$$S = -3 + (-0.31) = -3.31$$

$$\boxed{S = 3.31}$$