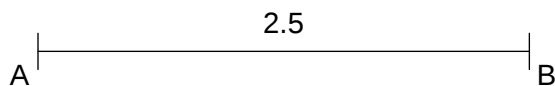


שאלון 006 קיץ 2007 מועד א

1.



נסמן את המהירות ההתחלתית של המכונית ב- x מטרים לשניה ואת הזמן שנסעה המכונית עד שהכדור פגעה בה מרגע שהמכונית יצאה ועד שהכדור פגע בה

S	V	t	
xy	x	y	מכונית
$3(y-1.5)$	3	$y-1.5$	כדור

הכדור נזרק
1.5 שניות
אחרי שהמכונית יצאה

היות והמרחק בין A ו B הוא 2.5 מטרים אז

$$xy + 3(y - 1.5) = 2.5$$

מרגע שהכדור פגע במכונית ועד שהמכונית הגיעה ליעדה

S	V	t	
$3(y-1.5)$	$0.6x$	$\frac{3(y-1.5)}{0.6x}$	מכונית

אם המהירות קטנה ב 40% אז המכונית נוסעת במהירות המהווה 60% ההתחלתית כלומר $\frac{60x}{100} = 0.6x$

ידוע כי המכונית הגיעה ל- B 7 שניות מרגע שיצאה מ- A ולכן $y + \frac{3(y-1.5)}{0.6x} = 7$

$$(1) \quad xy + 3(y - 1.5) = 2.5$$

$$(2) \quad y + \frac{3(y-1.5)}{0.6x} = 7$$

$$(1) \quad xy + 3y - 4.5 = 2.5$$

$$xy + 3y = 7$$

$$(x + 3)y = 7$$

$$y = \frac{7}{x+3}$$

$$(2) \quad y + \frac{3(y-1.5)}{0.6x} = 7 \quad / \cdot 0.6x$$

$$0.6xy + 3(y - 1.5) = 4.2x$$

$$6xy + 30(y - 1.5) = 42x$$

$$6xy + 30y - 45 = 42x \quad / : 3$$

$$2xy + 10y = 14x + 15$$

$$y(2x+10) = 14x + 15$$

$$y = \frac{14x+15}{2x+10}$$

נשווה בין 1 ל-2 :

$$\frac{7}{x+3} = \frac{14x+15}{2x+10} / (x+3)(2x+10)$$

$$7(2x+10) = (14x+15)(x+3)$$

$$14x + 70 = 14x^2 + 57x + 45$$

$$14x^2 + 43x - 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-43 \pm \sqrt{43^2 - 4 \cdot 14 \cdot (-25)}}{28}$$

$$x_{1,2} = \frac{-43 \pm \sqrt{3249}}{28} = \frac{-43 \pm 57}{28} \quad \left\langle \begin{array}{l} \frac{-43-57}{28} = -\frac{3}{2} \\ \frac{-43+57}{28} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

עד רגע ההתנגשות מהירות המכונית היתה $\frac{1}{2}$ מטרים בשניה

2. א.

בדיקה עבור $n=1$

$$\text{שאל} \quad \frac{(1+1)(1+2)}{1 \cdot 2} = 3$$

$$\text{ימין} \quad 3^1 = 3$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k מס' טבעי כלשהו) כלומר :

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (3k)}{(1 \cdot 2)(4 \cdot 5) \dots (3k-2)(3k-1)} = 3^k$$

צ"ל הטענה נכונה עבור $n=k+1$ כלומר

$$\frac{(k+2)(k+3)(k+4) \dots (3k)(3k+1)(3k+2)(3k+3)}{(1 \cdot 2)(4 \cdot 5) \dots (3k-2)(3k-1)(3k+1)(3k+2)} = 3^{k+1} / (k+1)$$

$$\frac{(k+2)(k+3)(k+4) \dots (3k)}{(1 \cdot 2)(4 \cdot 5) \dots (3k-2)(3k-1)} \cdot \frac{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}{(3k+1)(3k+2)} = 3^{k+1}$$

עפ' הנחת האנדוקציה .

$$3^k \cdot (3k+3) = 3^{k+1} \cdot (3k+3)$$

$$3^k \cdot 3 \cdot (3k+3) = 3^k \cdot 3 \cdot (3k+3)$$

נכון עבור $n=k+1$

על סמך אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה עבור כל המס' הטבעיים

ב.

$$\frac{16 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 42}{2 \cdot 20 \cdot 56 \cdot \dots \cdot 1640}$$

$$3n = 42$$

$$n = 14$$

$$(3n-2)(3n-1) = 1640$$

$$9n^2 - 3n - 6n + 2 = 1640$$

$$9n^2 - 9n - 1638 = 0 : 9$$

$$n^2 - n - 182 = 0$$

$$\boxed{n = 14} \quad n = -13$$

נציב $n = 14$

$$\frac{(14+1)(14+2)\dots 42}{(1 \cdot 2) \dots 1640} = 3^{14}$$

↓

$$\frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 42}{(1 \cdot 2) \dots 1640} = \frac{3^{14}}{15} = 318,864 \frac{3}{5}$$

3.

$$f(x) = 8\sin^2 x - \cos 4x$$

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{5} \quad \text{בתחום}$$

$$f'(x) = 16\sin x \cdot \cos x + 4\sin 4x = 0$$

$$8\sin 2x + 8\sin 2x \cos 2x = 0$$

$$8\sin 2x(1 + \cos 2x) = 0$$

↓

↓

$$8\sin 2x = 0$$

$$1 + \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -1$$

$$2x = 180k$$

$$\cos 2x = \cos 180$$

$$x = 90k$$

$$2x = 180 + 360k \quad 2x = -180 + 360k$$

$$x = 90 + 180k \quad x = -90 + 180k$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{5}}$$

$$f(0) = -1 \quad (0, -1)_{\min}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 - 1 = 7 \quad \left(\frac{\pi}{2}, 7\right)_{\max}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 3.573 \quad \left(\frac{4\pi}{5}, 3.573\right)_{\min}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$
y	min	+	max	-	min

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sin 120 + 4\sin 240 = 2\sqrt{3} > 0$$

$$y'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8\sin 240 + 4\sin 480 = -2\sqrt{3} < 0$$

$$f'(x) = 8\sin 2x + 4\sin 4x$$

$$f'(x) = 16\cos 2x + 16\cos 4x = 0$$

$$16\cos 2x + 32\cos^2 2x - 16 = 0$$

$$32\cos^2 2x + 16\cos 2x - 16 = 0 : 16$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0 \quad \cos 2x = t$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos 2x = -1 \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm 180 + 360k \quad 2x = \pm 60 + 360k$$

$$x = \pm 90 + 360k \quad x = \pm 30 + 360k$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$k=0 \quad \cancel{x = -30} \quad k=0$$

$$\times \quad k=1 \quad \times \quad k=1$$

x	0	$\frac{\pi}{9} = 20^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{18} = 70^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$
y''		+	0	-	0	-	0

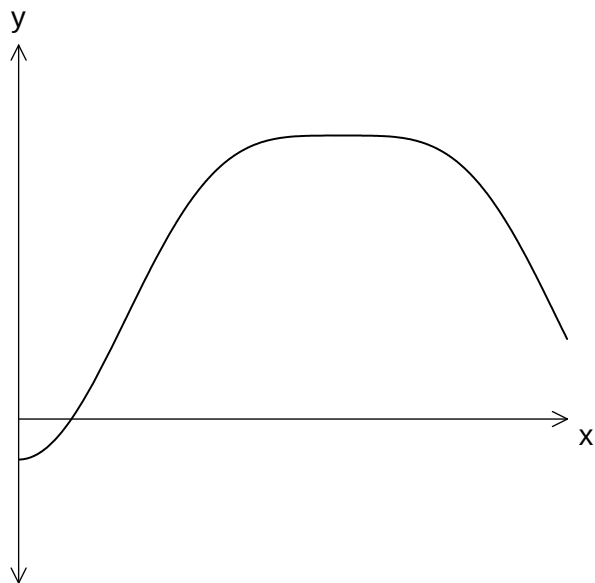
$$y''\left(\frac{\pi}{9} = 20^\circ\right) = 16\cos 40 + 16\cos 80 = 15.035 > 0$$

$$y''\left(\frac{7\pi}{18} = 70^\circ\right) = 16\cos 140 + 16\cos 280 = -9.478 < 0$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 16\cos 240 + 16\cos 480 = -16 < 0$$

תחומי קעירות כלפי מעלה: $0 < x < \frac{\pi}{6}$

תחומי קעירות כלפי מטה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{5}$



$$f\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\sin^2 144 - 6\sin 576 = 3.57$$

יש רק פתרון אחד למשוואה $f(x) = 0$ בתחום הנתון.
וזאת ניתן לראות ע"פ הגרף בתחום הנתון

4. א.

$$g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$g(x) = \frac{b \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot bx}{x^2+1} = \frac{b \cdot (x^2+1) - bx^2}{x^2+1} =$$

$$\frac{b \cdot (x^2+1) - bx^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{bx^2} + b - \cancel{bx^2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{b}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$b > 0 \quad x^2 + 1 > 0 \quad \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ לכל } x$$

תשובה הפונקציה $g(x)$ עולה לכל x

ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -b = -b$$

הסתמכנו כאן על הכלל:

$$x \rightarrow \infty \quad \sqrt{x^2} = x \quad \text{כש-}$$

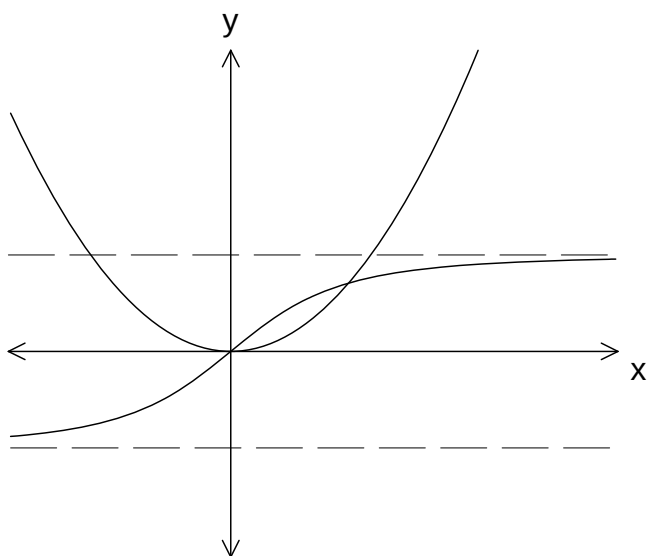
$$x \rightarrow -\infty \quad \sqrt{x^2} = -x \quad \text{כש-}$$

כלומר:

כש $x \rightarrow \infty$ האסימטוטה האופקית היא $y = b$

כש $x \rightarrow -\infty$ האסימטוטה האופקית היא $y = -b$

ג.



ד.



$$f(1) = g(1)$$

$$a \cdot 1^2 = \frac{b \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1}} \rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = b$$

$$\int_0^1 \left(\frac{bx}{\sqrt{x^2 + 1}} - ax^2 \right) dx = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$$

נבצע אינטגרל בהצבה :

$$\int \frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{x^2 + 1}} dx =$$

$$x^2 + 1 = t$$

$$2x dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{\sqrt{2} \cancel{x}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{t^{0.5}}{0.5} = \sqrt{2} \sqrt{t} = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 + 1}} - ax^2 \right) dx = a \left(\sqrt{2} \sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3} - \sqrt{2} =$$

$$a \left(\sqrt{2} \sqrt{2} - \frac{1^3}{3} - \sqrt{2} \right) = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$$

$$a \left(2 - \frac{1}{3} - \sqrt{2} \right) = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$$

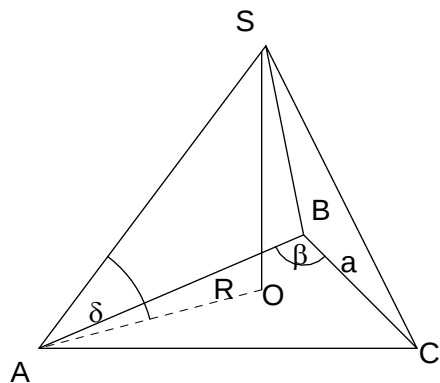
$$a \left(2 - \frac{1}{3} - \sqrt{2} \right) = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$$

$$a \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2} \right) = \frac{5}{3} - \sqrt{2}$$

$$\boxed{a = 1}$$

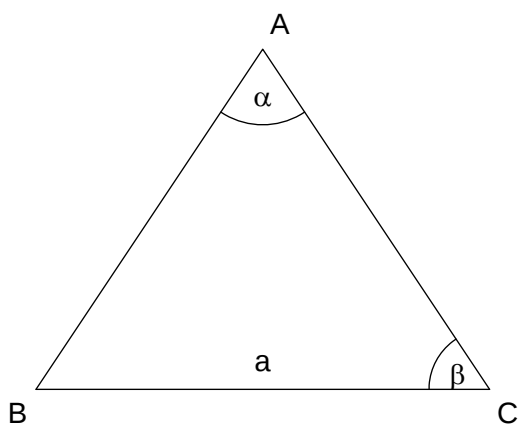
$$b = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

$$\boxed{b = \sqrt{2}}$$



בפרמידה ישרה, הגובה חותך את הבסיס במרכז המעגל החוסם את זה ולכן $AO = BO = CO = R$
(כאשר so הוא גובה הפרמידה)

נתבונן ב- $\triangle ABC$

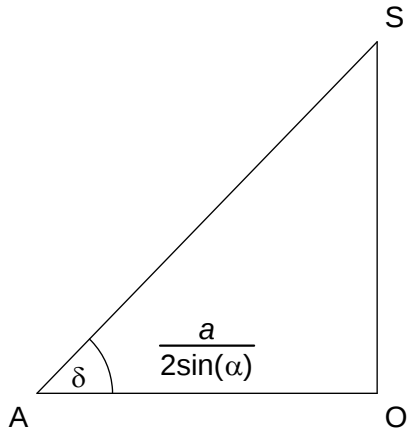


לפי משפט הסינוסים

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

ב. נתבונן ב $\triangle SOA$ ונימצא בו את גובה הפרמידה



$$AO = R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{SO}{a} = \tan \delta$$

$$SO = \frac{a \tan \delta}{2 \sin \alpha}$$

נתבונן ב $\triangle ABC$ ונמצא את שטח הבסיס :

$$\angle B = 180 - (\beta + \alpha) \quad \text{כי סכום זוויות במשולש הוא } 180^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sin \beta \sin (180 - (\beta + \alpha))}{2 \sin \alpha}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sin \beta \sin (\beta + \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

גובה שטח
הפרמידה הבסיס

$$V = \frac{\text{נפח הפרמידה}}{3}$$

$$V = \frac{\frac{a^2 \sin \beta \sin (\beta + \alpha)}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{a \tan \delta}{2 \sin \alpha}}{3}$$

$$V = \frac{a^3 \sin \beta \sin (\beta + \alpha) \tan \delta}{12 \sin^2 \alpha}$$

נסמן את הזווית המבוקשת ב- x .
היות ו $\alpha = \beta = 60^\circ$ $\triangle ABC$ הוא שווה צלעות ולכן הגובה AF הוא גם תיכון
(כלומר F באמצע BC) כמובן הפרמידה ישרה ולכן $SB = SC$ ולכן
 $\triangle SBC$ היא שווה שוקיים והגובה SF הוא גם תיכון

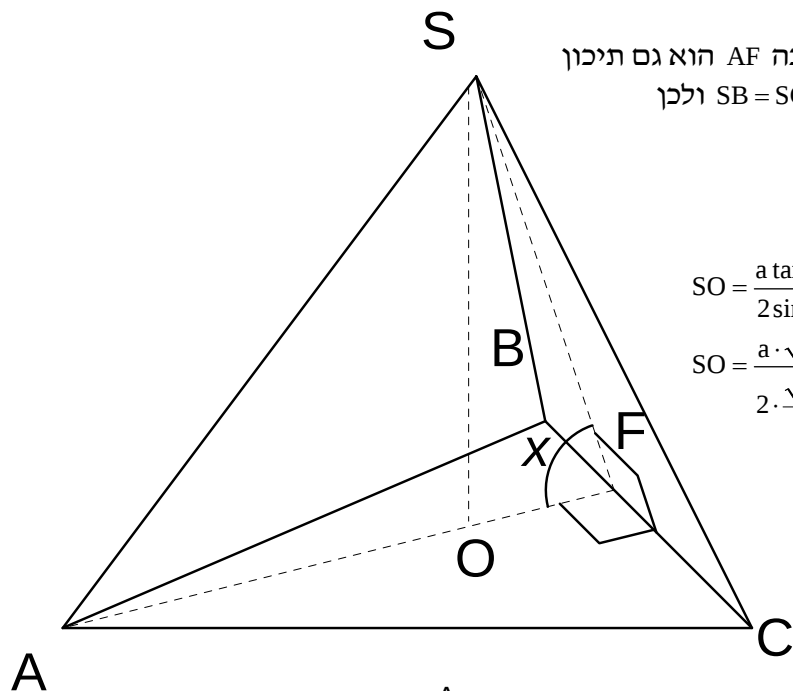
$$SO = \frac{a \tan \delta}{2 \sin \alpha}$$

מצאנו ב- א' כי

אם $\alpha = \delta = 60^\circ$

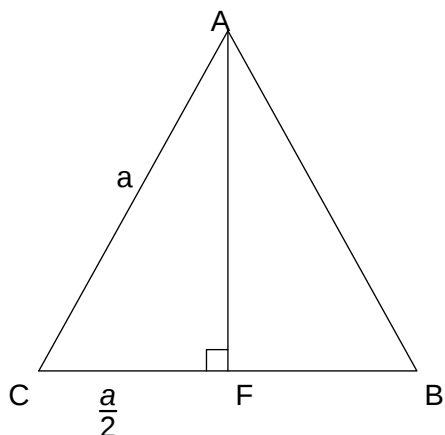
$$SO = \frac{a \tan 60}{2 \sin 60}$$

$$SO = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$$



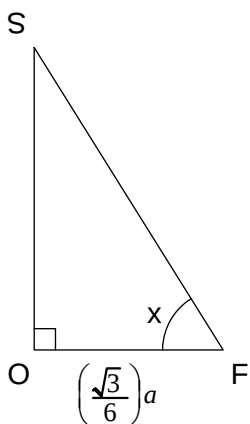
במשולש שווה צלעות נקי מפגש האנכים

האמצעיים היא גם נקודת מפגש התיכונים ולכן
נמצא את AF :



$$AF = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

$$OF = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$



$$\tan x = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$x = 73.89^\circ$$