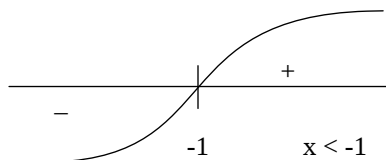


פתרונות שאלון 005 קיץ 2007 מועד א

1.

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$$

א. $f(x) < 0$



$$\frac{x+1}{2x^2+x+1} < 0 \quad / (2x^2+x+1)^2$$

$$(x+1)(2x^2+x+1) < 0$$

$$x+1=0 \quad 2x^2+x+1=0$$

$$x = -1 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.2}}{4}$$

תשובה: $x < -1$

ב. $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = m \quad (1)$

$$2mx^2 + mx + m = x + 1$$

$$2mx^2 + x(m-1) + m-1 = 0$$

$$\Delta > 0 \quad a \neq 0$$

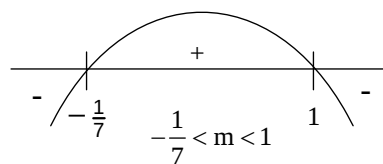
$$2m \neq 0 \quad \Delta = (m-1)^2 - 8m(m-1) > 0$$

$$m \neq 0 \quad m^2 - 2m + 1 - 8m^2 + 8m > 0$$

$$-7m^2 + 6m + 1 > 0$$

$$-7m^2 + 6m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{-14} = \frac{-6 \pm 8}{-14} < \frac{1}{7}$$



תשובה: $-\frac{1}{7} < m < 1$; $m \neq 0$

(2) $\Delta < 0$

$$m < -\frac{1}{7} \quad ; \quad m > 1$$

$$a = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$y = -x - 1$$

↓

לא מתאים.

בדיקה של קו ישר:

תשובה: $m > 1$ או $m < -\frac{1}{7}$

2.

$$a_1 = 11$$

$$a_{n+1} = -0.5a_n + 4.5$$

$$b_n = a_n - 3$$

א.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 3}{a_n - 3} = \frac{-0.5a_n + 4.5 - 3}{a_n - 3} =$$

$$\frac{-0.5a_n + 1.5}{a_n - 3} = \frac{-0.5(a_n - 3)}{(a_n - 3)} = -\frac{1}{2}$$

תשובה: $q = -\frac{1}{2}$

$$q^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ב. (1)

תשובה: $q = \frac{1}{4}$

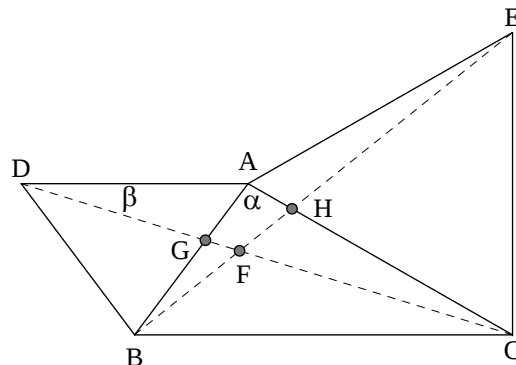
(2)

$$n = 1 \quad a_2 = -0.5a_1 + 4.5 = -0.5 \cdot 11 + 4.5 = -1$$

$$b_2 = a_2 - 3 = -1 - 3 = -4$$

זוגיים $S = \frac{a_2}{1 - q^2} = \frac{-4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-4}{\frac{3}{4}} = \frac{-4}{1} \cdot \frac{4}{3} = -5\frac{1}{3}$

תשובה: $S = -5\frac{1}{3}$



א. נתבונן ב- $\triangle BAE$ וב- $\triangle DAC$
נסמן את $\angle BAC$ ב- α .

$AD = AB$ (נתון כי $\triangle ABD$ הוא שווה צלעות).

$AC = AE$ (נתון כי $\triangle ACE$ הוא שווה צלעות).

$\angle EAC = 60^\circ$ ו- $\angle DAB = 60^\circ$ (במשולש שווה צלעות שוות כל הזוויות ל- 60°)

$$\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 60 + \alpha$$

$$\angle BAE = \angle EAC + \angle CAB = 60 + \alpha$$

$\Downarrow$

משפט חפיפה צלע זווית צלע

$$\triangle DAC \cong \triangle BAE$$

$\Downarrow$

צלעות מתאימות במשולשים חופפים שוות

$$DC = BE$$

מ.ש.ל.

ב. נסמן $\angle ADG = \beta$

(הוכחנו בסעיף א')

$$\triangle DAC \cong \triangle BAE$$

$\Downarrow$

$$\angle ABE = \angle ADC = \beta$$

(במשולש שווה צלעות שווה כל אחד מהזוויות 60°)

$$\angle DAB = 60^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle DGA = 180^\circ - (60 + \beta) = 120^\circ - \beta$$

(סכום זוויות במשולש הוא 180°)

$$\angle DBA = \angle BGF = 120^\circ - \beta$$

(זוויות קודקודיות שוות זו לזו)

נתבונן ב- $\triangle BGF$

(סכום זוויות במשולש היא 180°)

$$\angle GFB = 180^\circ - \angle FGB - \angle ABH$$

$$\angle GFB = 180^\circ - (120^\circ - \beta) - \beta$$

$$\angle GFB = 180^\circ - 120^\circ + \beta - \beta$$

$$\angle GFB = 60^\circ$$

ג. כדי שיהיה אפשר לחסום מרובע במעגל, סכום כל זוג זוויות נגדיות של המרובע צריך להיות 180° .

מספיק להראות זוג אחד בלבד מקיים זאת.

(מצאנו ב-א')

$$\angle GFB = 60^\circ$$

(סכום זוויות צמודות הוא 180°)

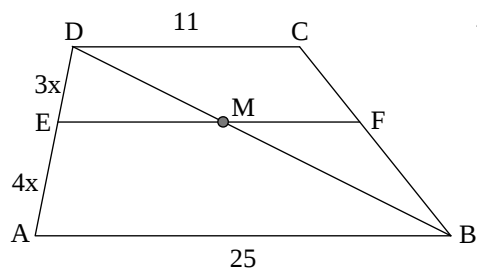
$$\angle GFH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



$\angle BAC$ צריכה להיות

$$\angle BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

4. א.



בנית עזר : נחבר את B ו-D ונסמן את נקודת החיתוך של DB ו-EF ב-M.

נתון.

$$\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$$

נוכל לסמן את DE ב- $3x$ ואת EA ב- $4x$ (קטעים בעלי מידה משותפת)

↓

$$AD = DE + EA = 7x$$

נתבונן ב- $\triangle DAB$

$$EF \parallel AB$$

↓

$$\frac{EM}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$AB = 25$$

כלומר :

$$\frac{EM}{25} = \frac{3x}{7x}$$

$$EM = \frac{75}{7}$$

נתון

(הוכחה אי של משפט תלס)

נתון

נתבונן ב- $\triangle DBC$

$$EF \parallel DC$$

$$\frac{MF}{DC} = \frac{BF}{BC} = \frac{BM}{BD}$$

נתון

(הרחבה של משפט תלס)

נתבונן ב- $\triangle BDA$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DM}{BM}$$

↓

$$\frac{DM}{BM} = \frac{3}{4}$$

ולכן נוכל לסמן $DM = 3y$ ו- $BM = 4y$

↓

$$BD = 3y + 4y = 7y$$

נתון

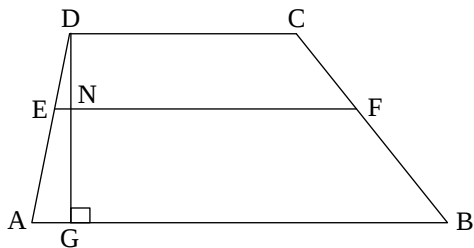
$$DC = 11$$

$$\frac{MF}{11} = \frac{4y}{7y} \quad \text{נציב ונקבל :}$$

$$EF = EM + MF = \frac{75}{7} + \frac{44}{7} = \frac{119}{7} = 17$$

תשובה : 17 ס"מ

ב.



(זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות)

בניית עזר : נוריד אנך מהנקודה D לבסיס AB.
ונסמן את נקודת החיתוך של האנך עם AB ב-G
ואת נקודת החיתוך של האנך עם EF ב-N.

נתון

$$EF \parallel AB$$



$$\angle END = \angle AGB = 90^\circ$$



DN גובה בטרפז DEFC

DG גובה בטרפז DABC

נתון

$$\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$$

נתון

$$EF \parallel AB$$



(משפט תלס)

$$\frac{DE}{EA} = \frac{DN}{NG} = \frac{3}{4}$$

לכן נוכל לסמן $DN = 3h$ ו- $NG = 4h$

נתון

$$AB = 25$$

נתון

$$DC = 11$$

מצאנו בסעיף א'

$$EF = 17$$



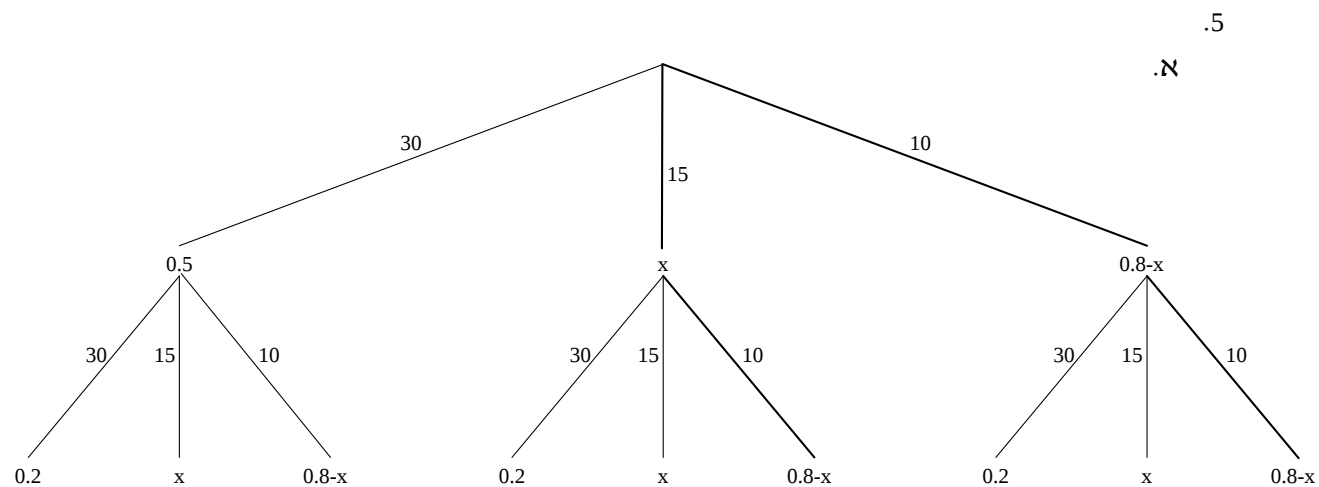
(שטח טרפז, היא מחצית סכום הבסיסים, כפול הגובה)

$$S_{DECF} = \frac{(EF + DC) \cdot DN}{2} =$$

$$= \frac{(17 + 11) \cdot 3h}{2} = 42h$$

$$S_{ABFE} = \frac{(AB + EF) \cdot GN}{2} = \frac{(25 + 17) \cdot 4h}{2} = 84h$$

$$\frac{S_{EFCD}}{S_{ABFC}} = \frac{42h}{84h} = \frac{1}{2}$$



נתון שההסתברות לזכות ב-2 משחקים רצופים בסכום כולל של בדיוק 25 נקודות היא 0.3
המסלולים האפשריים הם: 10,15 או 15,10
המשוואה המתקבלת היא:

$$(0.8 - x)x + x \cdot (0.8 - x) = 0.3$$

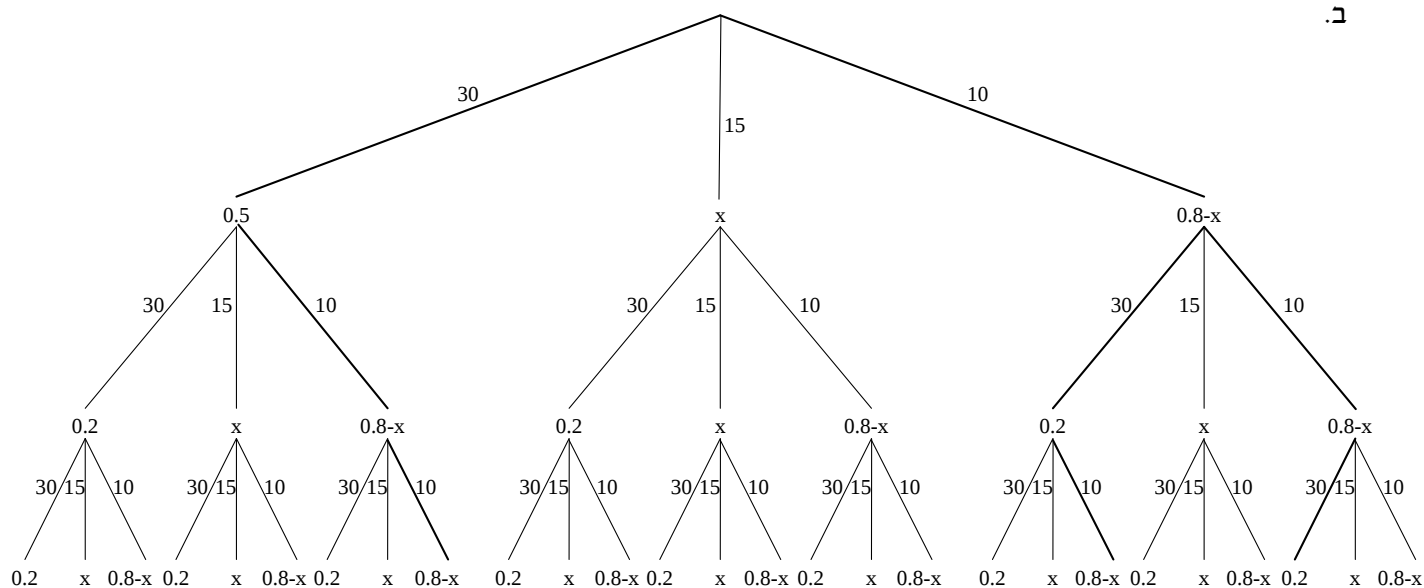
$$0.8 - x^2 + 0.8x - x^2 = 0.3$$

$$-2x^2 + 1.6x - 0.3 = 0 \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ x_2 = 0.3 \end{cases}$$

לפי הנתון $p > 0.4$ לכן $p = 0.5$

תשובה: $p = 0.5$

ב.



סלולים האפשריים לזכות ב- 3 משחקים רצופים בסכום כולל של 50 נקודות הם :

$$\left. \begin{aligned} 10, 10, 30 &\rightarrow p_1 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.2 = 0.05 \\ 10, 30, 10 &\rightarrow p_2 = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.5 = 0.05 \\ 30, 10, 10 &\rightarrow p_3 = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.05 \end{aligned} \right\}$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 0.15$$

מבוקש

תשובה : $p = 0.15$

ג.

ההסתברות שלכל היור אחד יזכה ב-50, p שווה להסתברות שאחד מתוך חמישה יזכה או 0 מתוך 5

$$\binom{1}{5} p^1 (1-p)^4 + \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5$$

יזכו. כלומר : עפ"י חוק ברנולי

נציב $p = 0.15$ (תוצאת סעיף ב')

$$5 \cdot 0.15 \cdot 0.85^4 + 0.85^5 = 0.835$$

תשובה : 0.835

נסמן טת המאורעות :

A – "המועמד הגיע מעיר"

$\bar{A}$ – "המועמד הגיע משוב"

B – "המועמד התקבל לתחרות"

$\bar{B}$ – "המועמד לא התקבל לתחרות"

נתון :

$$P(A) = 1.5P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1.5(1 - P(A))$$

$$P(A) = 1.5 - 1.5P(A)$$

$$2.5P(A) = 1.5$$

$$P(A) = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(B|A) = 0.52$$

כמו כן נתון :

נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנית :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.6} = 0.52$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.52 \cdot 0.6 = 0.312$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0.256$$

נתון נוסף :

נציב בטבלה דו-מימדית :

	$\bar{B}$ לא	B התקבל	
0.6	0.312	0.288	A עיר
0.4	0.144	0.256	$\bar{A}$ שוב
	0.456	0.544	

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.288}{0.6} = 0.48$$

א.

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0.256}{0.4} = 0.64$$

ב.

ואכן מבין העירוניים מתקבלים רק 48% מהמועדים, לעומת 64% מהאחרים ($0.64 > 0.48$).

ג. ג. מבין המועמדים שלא למדו פיתוח קול:

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{120}{120+180} = 0.4$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{N(\bar{A} \cap B)}{N(\bar{A})} = \frac{40}{60+40} = 0.4$$

מבין המועמדים שלמדו פיתוח קול:

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{60}{60+15} = 0.8$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{N(\bar{A} \cap B)}{N(\bar{A})} = \frac{120}{120+30} = 0.8$$

(1) בכל אחת מהקבוצות בנפרד מתקיים $P(B|A) = P(B|\bar{A})$. כלומר אין קשר סטטיסטי בין

מקום המגורים לבין הקבלה לפיכך פיתוח הקול הוא גורם מתווך שגרם להצמדת גורמים
בין מקום המגורים לסיכויי הקבלה.
תוצאות אלה מצדיקות את טענת המארגנים.

(2) ניתן לשער שפיתוח קול עשוי להיות גורם שהעלה את הסיכוי להתקבל, שכן גם
העירוניים וגם המועמדים משובים אחרים, 80% מבין אלה שלמדו פיתוח קול התקבלו,
לעומת רק 40% מאלה שלא למדו פיתוח קול.