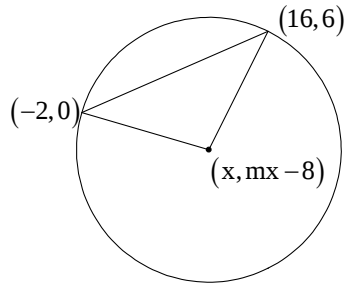


פתרונות בחינת בגרות במתמטיקה שאלון 007 חורף תשס"ז 2007

1. א.



נסמן: $M(x, mx-8)$ ונשווה את אורכי הרדיוסים.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (mx-8)^2 &= (x-16)^2 + (mx-14)^2 \\ x^2 + 4x + 4 + m^2x^2 - 16mx + 64 &= x^2 - 32x + 256 + m^2x^2 - 28mx + 196 \\ 4x - 16mx + 68 &= -32x - 28mx + 452 \\ 36x + 12mx &= 384 \\ x &= \frac{384}{36+12m} = \frac{32}{3+m}\end{aligned}$$

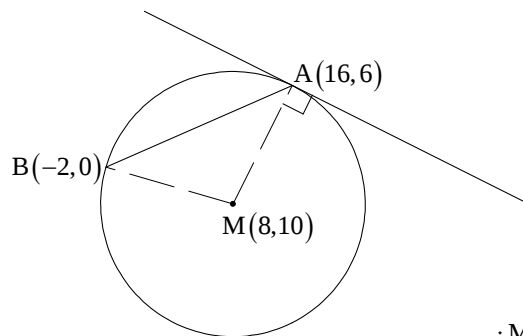
נציב x במשוואת הישר ונקבל:

$$M\left(\frac{32}{3+m}, \frac{32m}{3+m} - 8\right)$$

ב. אם המרכז נמצא על ציר x אז,

$$\begin{aligned}\frac{32m}{3+m} - 8 &= 0 \\ 32m - 24 - 8m &= 0 \\ 24m &= 24 \\ m &= 1\end{aligned}$$

נציב $m=1$ במרכז שקיבלנו בא' ונקבל, את מרכז המעגל $M(8, 0)$



שיפוע הרדיוס MA:

$$m_{MA} = \frac{6-0}{16-8} = \frac{3}{4}$$

ולכן שיפוע המשיק הוא $-\frac{4}{3}$ (הישרים מאונכים כי זווית בין משיק לרדיוס היא 90°)

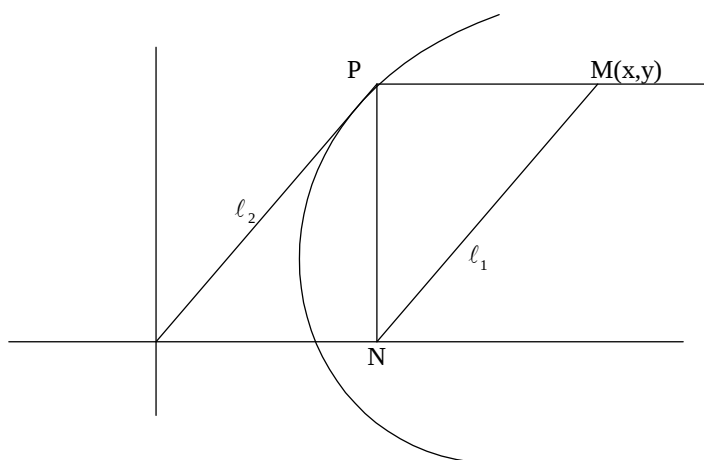
$$m_{AB} = \frac{6-0}{16-(-2)} = \frac{1}{3}$$

ולכן

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}} \right| = 3$$

$$\alpha = 71.56$$

2. א.



P נקודה על היפרבולה. נניח כי שיעור ה-x של P היא t.

$$t^2 - a^2 = y^2$$

$$t = \pm \sqrt{a^2 + y^2}$$

נניח כי ברביע הראשון: $P(\sqrt{a^2 + y^2}, y)$

ועל כן: $N(\sqrt{a^2 + y^2}, 0)$

ע"פ הנתון $\ell_1 \parallel \ell_2$ ולכן השיפוע של ℓ_1 הוא גם שיפוע של ℓ_2

$$m_{\ell_2} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

$$m_{\ell_1} = \frac{y}{x - \sqrt{a^2 + y^2}}$$

נשווה ונקבל:

$$\frac{y}{x - \sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\frac{1}{x - \sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

$$\sqrt{y^2 + a^2} = x - \sqrt{y^2 + a^2}$$

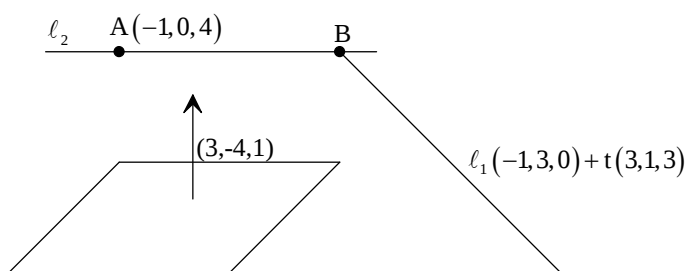
$$2\sqrt{y^2 + a^2} = x \quad ()^2$$

$$4(y^2 + a^2) = x^2$$

$$x^2 - 4y^2 = 4a^2$$

ב. המקום הגיאומטרי שהתקבל הוא היפרבולה.

3.



א. 1. B על הישר ℓ_1 , נסמן B נקודה כללית על ℓ_1

$$B(-1+3t, 3+t, 3t)$$

$$A(-1, 0, 4)$$

ולכן ווקטור הכיוון $\overline{BA}$ יהיה $\overline{BA} = (3t, t+3, 3t-4)$

2. הישר ℓ_2 מקביל למישור ולכן הוא מאונך לווקטור $(3, -4, 1)$.

כלומר המכפלה הסקלרית 0:

$$(3t, t+3, 3t-4)(3, -4, 1) = 0$$

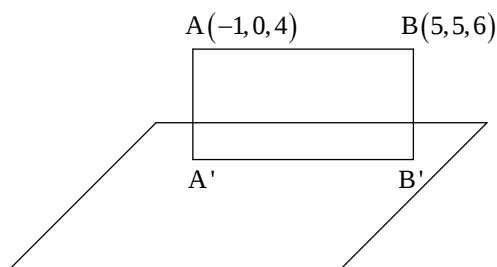
$$9t - 4t - 12 + 3t - 4 = 0$$

$$t = 2$$

נציב זאת ב-B

$$B(5, 5, 6)$$

ב.



נחשב את AB:

$$AB = \sqrt{(5+1)^2 + (5-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{65}$$

למרחק הנק' A מהמישור $AA' = BB' = \pi$

נחשב זאת

$$AA' = \frac{|-3+4-10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{26}}$$

ולכן היקף המלבן יהיה

$$P = 2\sqrt{26} + \frac{18}{\sqrt{26}} = 19.65$$

4. נמצא את שיעור נקודת המקסימום

$$f(x) = \frac{ax}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{a(1+x^2) - 2x \cdot ax}{(1+x^2)^2} = \frac{a+ax^2-2ax^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-ax^2+a}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$-ax^2+a=0 \quad / : a \quad (a \neq 0)$$

$$-x^2+1=0$$

$$x = \pm 1$$

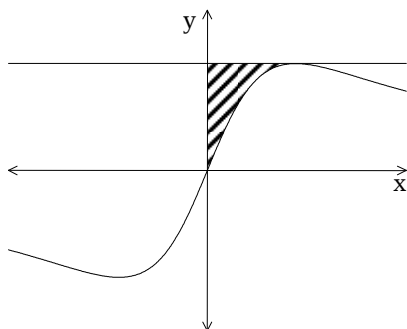
שיעור נקודת המקסימום היא $\left(1, \frac{a}{2}\right)$

בנקודת מקסימום שיפוע המשיק 0 ולכן משוואת המשיק היא $y = \frac{a}{2}$.

השטח המבוקש הוא השטח בשרטוט: $\frac{a}{2} \ln t$

כלומר: $\frac{a}{2} \ln|x^2+1|$

השטח המבוקש יהיה השטח בצירור.



נבטא את האינטגרל של

נפתור את האינטגרל בשיטת ההצבה:

$$\int ax(1+x^2)^{-1} dx$$

נסמן $1+x^2 = t$

$$2x \cdot dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int ax(1+x^2)^{-1} dx$$

$$\int ax t^{-1} \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{a}{2} \ln t = \frac{a}{2} \ln(x^2+1)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{2} - \frac{ax}{1+x^2} \right) dx = \frac{a}{2} x - \frac{a}{2} \ln|x^2+1| = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln 2 \right) - \left(0 - \frac{a}{2} \ln 1 \right)$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln 2 = \frac{a}{2} (1 - \ln 2)$$

ב. נסמן $w = r\text{cis}\theta$ ואז $\overline{w} = r\text{cis}(-\theta)$

$$z = \frac{w}{\overline{w}} = \frac{r\text{cis}\theta}{r\text{cis}(-\theta)} = \frac{r}{r}\text{cis}(\theta - (-\theta)) = 1\text{cis}(2\theta)$$

אנו רואים כי הזווית של z כפולה מהזווית של w והגודל של z הוא 1.
מ.ש.ל.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - a} \quad .5$$

א. 1.

$$e^x - a \neq 0$$

$$e^x \neq a$$

$$x \neq \ln a$$

$$\frac{e^x}{e^x - a} = 0$$

$$e^x = 0 \text{ לא יתכן}$$

$$y = \frac{e^0}{e^0 - a} = \frac{1}{1 - a} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{1 - a}\right)$$

$$e^x = a = 0$$

$$x = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - a} = \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - a} = \frac{0}{0 - a} = 0$$

$$y' = \frac{e^x(e^x - a) - e^x \cdot e^x}{(e^x - a)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - ae^x - \cancel{e^{2x}}}{(e^x - a)^2}$$

2. חיתוך עם ציר x (y = 0)

חיתוך עם ציר y (x = 0)

3. אסימפטוטה אנכית

אסימפטוטה אופקית

ועל כן עבור $x \rightarrow \infty$ $y = 1$

ועבור $x \rightarrow -\infty$ $y = 0$

ב. נוכיח כי הנגזרת שלילית לכל x בתחום ההגדרה

$$(e^x - a)^2 \text{ חיובי לכל } x \neq \ln a$$

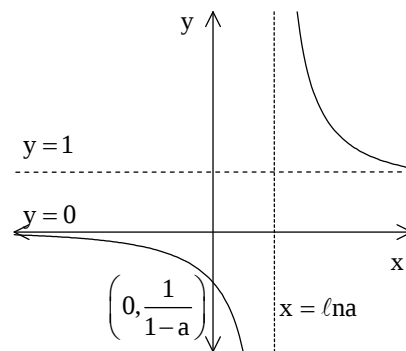
$a > 0$ ע"פ הנתון

$e^x > 0$ תמיד

לכן הנגזרת תמיד שלילית.

מ.ש.ל.

ג. 1. עבור $a > 1$ ($\ell na > 0$)



2. עבור $0 < a < 1$ ($\ell na < 0$)

