

פתרונות בחינת בגרות במתמטיקה שאלון 006 חורף תשס"ז 2007

1.



נתאר את מה שקרה ביום א':
נניח כי מהירותה ההתחלתית היתה $3x$:
והמרחק בין A ל-B היא y .

s	v	t		
y	$3x$	$\frac{y}{3x}$	התכנון	
6x	$3x$	2	עד C	בפועל
y-6x	x	$\frac{y-6x}{x}$	עד B	

היות והרכבת הגיעה בפועל 40 דקות ($\frac{2}{3}$ השעה) ביחס לזמן המתוכנן אז:

$$(1) \quad \frac{2}{3} + \frac{y}{3x} = 2 + \frac{y-6x}{x}$$

נתאר את מה שקרה ביום ב':

s	v	t		
y	$3x$	$\frac{y}{3x}$	התכנון	
6x+14	$3x$	$\frac{6x+14}{3x}$	שלב א: עד 14 ק"מ אחרי C	בפועל
y-6x-14	x	$\frac{y-6x-14}{x}$	משלב א' עד B	

כאן איחרה הרכבת ב- 20 דקות ($\frac{1}{3}$ שעה) ביחס לזמן המתוכנן ולכן:

$$(2) \quad \frac{1}{3} + \frac{y}{3x} = \frac{6x+14}{3x} + \frac{y-6x-14}{x}$$

נפתור את מערכת המשוואות שקיבלנו:

$$(1) \quad \frac{x/2}{3} + \frac{1/y}{3x} = \frac{3x/2}{2} + \frac{3/y-6x}{x} \quad / \cdot 3x$$

$$2x + y = 6x + 3y - 18x$$

$$2y = 14x$$

$$y = 7x$$

$$(2) \quad \frac{x/1}{3} + \frac{1/y}{3x} = \frac{1/6x+14}{3x} + \frac{3/y-6x-14}{x} \quad / \cdot 3x$$

$$x + y = 6x + 14 + 3y - 18x - 42$$

$$2y = 13x + 28$$

$$y = \frac{13x + 28}{2}$$

$$7x = \frac{13x + 28}{2}$$

$$14x = 13x + 28$$

$$y = 7 \cdot 28 = 196$$

א. המרחק הוא 196 ק"מ.

ב. המהירות היא $3x$ כלומר 84 קמ"ש $= 3 \cdot 28$

2. א. נבדוק את הטענה עבור $n = 4$:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 0.4$$

$$0.43 > 0.4$$

הטענה נכונה עבור $n = 4$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > 0.4$$

עבור n טבעי כלשהו הגדול או שווה ל-4.

ע"פ ההנחה נוכיח כי :

$$\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > 0.4$$

נוסיף $\frac{1}{n+2}$ לשני האגפים, כלומר נוכיח כי :

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > 0.4 + \frac{1}{n+2}$$

ע"ס הנחת האינדוקציה מספיק להוכיח כי :

$$\cancel{0.4} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \cancel{0.4} + \frac{1}{n+2}$$

הוכחה :

$$\frac{(2n+2)(n+2)/1}{2n+1} + \frac{(2n+1)(n+2)/1}{2n+2} > \frac{(2n+1)(2n+2)/1}{n+2} \quad / (n+2)(2n+1)(2n+2)$$

$$(2n+2)(n+2) + (n+2)(2n+1) > (2n+1)(2n+2)$$

$$2n^2 + 6n + 4 + 2n^2 + 5n + 2 > 4n^2 + 6n + 2$$

$$4n^2 + 11n + 6 > 4n^2 + 6n + 2$$

$$5n + 4 > 0$$

לכל n טבעי הגדול או שווה ל-4.

ע"ס אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי הגדול או שווה ל-4.

מ.ש.ל.

ב. נתבונן בשיוויון שהוכחנו ב-א' כנתון לכל $n \geq 4$.

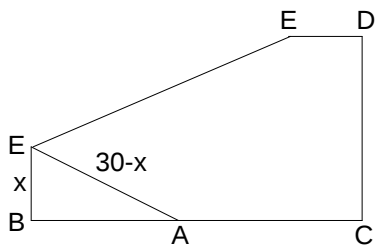
נציב בו $n = 99$ ונקבל :

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{198} > 0.4$$

נוסיף $\frac{1}{100}$ לשני האגפים ונקבל :

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{198} > 0.41$$

מ.ש.ל.



3. נסמן $EB = x$ ואז $AE = 30 - x$

נמצא את AB ע"י משפט פתגורס :

$$(AB)^2 + x^2 = (30 - x)^2$$

$$(AB)^2 = 900 - 60x + x^2 - x^2$$

$$AB = \sqrt{900 - 60x} = \sqrt{4(225 - 15x)} = 2\sqrt{225 - 15x}$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{2\sqrt{225 - 15x} \cdot x}{2} = x\sqrt{225 - 15x}$$

נגזור ונשווה ל-0 :

תחום ההגדרה של הפונקציה : $0 \leq x \leq 15$

$$u = x \quad v = \sqrt{225 - 15x}$$

$$u' = 1 \quad v' = \frac{-15}{2\sqrt{225 - 15x}}$$

$$S' = u'v + v'u = \sqrt{225 - 15x} - \frac{15x}{2\sqrt{225 - 15x}} =$$

$$= \frac{2(225 - 15x) - 15x}{2\sqrt{225 - 15x}} = \frac{450 - 45x}{2\sqrt{225 - 15x}} = 0$$

$$450 - 45x = 0 \Rightarrow x = 10$$

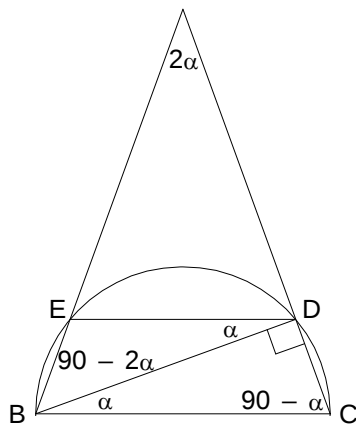
$$S'' = (450 - 45x)' = -45 < 0 \quad ; \quad \max$$

$$S_{\max} = S_{10} = 10 \cdot \sqrt{225 - 15 \cdot 10} = 10\sqrt{75}$$

$$= 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$$

נגזרת שנייה למונה בלבד לקביעת סימן.

4. נמצא את הזווית α ולוונטית לשאלה :



$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

$$\angle BDC = 90^\circ \quad (\text{היקפית על קוטר})$$

$$\angle DBC = \alpha \quad (\text{סכום זוויות במשולש})$$

$$\angle EBD = 90 - \alpha - \alpha = 90 - 2\alpha$$

$$\angle EDB = \alpha \quad (\text{זוויות מתחלפות בין מקבילים})$$

$$\angle BED = 90 + \alpha \quad (\text{סכום זוויות במשולש BED})$$

משולש BED

נבצע משפט הסינוסים :

$$\frac{2k}{\sin(90 - 2\alpha)} = \frac{BD}{\sin(90 + \alpha)}$$

$$\frac{2k}{\cos 2\alpha} = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$BD = \frac{2k \cos \alpha}{\cos 2\alpha}$$

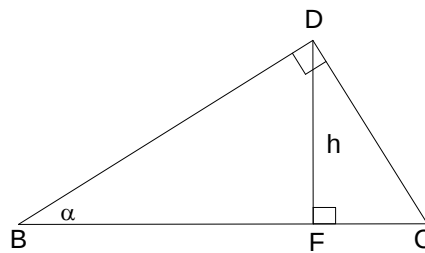
משולש BDC

$$\frac{BD}{BC} = \sin(90 - \alpha)$$

$$\frac{2k \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \cos \alpha$$

$$BC = \frac{2k}{\cos 2\alpha}$$

נוריד אנך מ-D ל-BC, אנך זה הוא גובה הטרפז :



$$\frac{h}{2k \cos \alpha} = \sin \alpha \quad ; \quad h = \frac{2k \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{k \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

כעת נבטא את שטח הטרפז :

$$S = \frac{(BC + ED)h}{2} = \frac{\left(\frac{2k}{\cos 2\alpha} + 2k\right) \cdot \frac{k \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{2} = \frac{2k + 2k \cos 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} \cdot \frac{k \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2k(1 + \cos 2\alpha)}{2 \cdot \cos 2\alpha} \cdot \frac{k \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{k^2 (1 + \cos 2\alpha) \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

5. א. נמצא את ערך ה-x של נקודות ההשקה :
 $2x^2 - x = 6$ (נתון כי ה-y של נק' ההשקה הוא 6)

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \left\langle -\frac{3}{2} \right.$$

שיפוע המשיק שלילי ע"פ הנתון.

$$y' = 4x - 1$$

$$y'(2) = 7 > 0$$

$$y'\left(-\frac{3}{2}\right) = -7 < 0$$

על כן נקודת ההשקה היא $(-1.5, 6)$ ושיפוע המשיק היא -7 ולכן משוואת המשיק תהיה

$$y - 6 = -7(x + 1.5)$$

$$y = -7x - 4.5$$

ב. ראשית נמצא את כל השטח המוגבל בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-y :

$$\int_{-1.5}^0 (2x^2 - x - (-7x - 4.5)) dx = \int_{-1.5}^0 (2x^2 + 6x + 4.5) dx = \int_{-1.5}^0 \frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 4.5x$$

$$= (0) - \left(\frac{2 \cdot (-1.5)^3}{3} + 3 \cdot (-1.5)^2 + 4.5 \cdot (-1.5) \right) = \frac{4}{9}$$

השטח המוגבל בין הישר שהעבירו, המשיק וציר y יהיה $\frac{4}{9}$. כלומר $\frac{9}{8}$!

הישר חותך את המשיק ב-a.

משוואת המשיק $y = -7x - 4.5$ ולכן נקודת החיתוך תהיה $(0, 0)$ $(a, -7a - 4.5)$

$$y = \frac{-7a - 4.5}{a} \cdot x$$

השטח יהיה :

$$\int_a^0 \left(\frac{-7a - 4.5}{a} x \right) dx + \int_0^a (-7x - 4.5) dx$$

$$\int_a^0 \left(\frac{-7a - 4.5}{a} x \right) dx = \int_a^0 \frac{-7a - 4.5}{a} \cdot \frac{x^2}{2} = 0 - \left(\frac{(-7a - 4.5) \cdot a^2}{2} \right) = \frac{(7a + 4.5)a}{2}$$

$$\int_0^a (-7x - 4.5) dx = \int_0^a \frac{-7x^2}{2} - 4.5x = -3.5a^2 - 4.5a$$

$$S = \frac{7a^2 + 4.5a}{2} - 3.5a^2 - 4.5a = 3.5a^2 + 2.25a - 3.5a^2 - 4.5a = -2.25a$$

נשווה ל- $\frac{9}{8}$ ונקבל :

$$-2.25a = \frac{9}{8} \quad / \cdot 8$$

$$-18a = 9$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}}$$