

**מבחן מתכונת במתמטיקה - שאלון 006**

**פרק א': אלגברה:** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

פתור אחת משאלות 1 – 2.

1. נתונות הסדרות:

$$1, 3, 5, \dots, a_n$$

$$2, 4, 6, \dots, b_n$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{a_n} > \sqrt{2n+1}$$

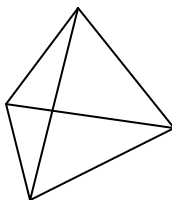
2. בבריכה שני ברזים מסוג  $A$  ושלושה ברזים מסוג  $B$ .

כל הברזים מסוג  $A$  ומסוג  $B$  ממלאים ביחד בריכה במשך 4 שעות. כאשר ממלאים שני שלישים של הבריכה בעזרת ברז אחד מסוג  $A$ , ואז סוגרים ברז זה ופותחים ברז מסוג  $B$ , מתמלאת הבריכה כולה במשך 20 שעות בסה"כ. בכמה שעות יכול כל אחד מהברזים למלא את הבריכה לבדו?

**פרק ב': חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וטריגונומטריה** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

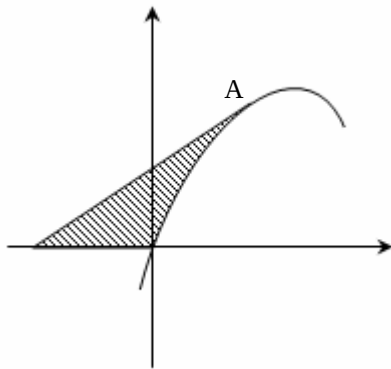
פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.

3. מחוט שאורכו  $k$  מטרים יוצרים שלד של פירמידה ישרה, משולשת ומשוכללת. מהו אורך מקצוע הבסיס עבורו שטח המעטפת של הפירמידה יהיה מקסימלי.



4. לגרף הפונקציה  $y = 2x + k \sin 2x$  ( $k \neq 0$ ) העבירו משיק בנקודה A ששיפועו 2.

$$x_A < \frac{\pi}{3}$$



- א. הביעו את משוואת המשיק באמצעות  $k$ .
- ב. הביעו באמצעות  $k$  את השטח המוגבל ע"י המשיק, גרף הפונקציה וציר  $x$ .
- ג. מצאו את ערכו של  $k$  אם נתון שהשטח הנ"ל

$$\text{שווה } \frac{-k}{2}.$$

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{x - k\sqrt{x}}$  ( $k < 0$ )

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (באמצעות  $k$ )
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? (באמצעות  $k$ )
- ג. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. עבור  $x > k$  כמה פתרונות למשוואה:

$$\frac{x^2}{x - k\sqrt{x}} = 6.75k^2$$

תשובות - שאלון 006, סימולציה מס' 1

1. הוכחה

2. ברז A : 12 שעות

ברז B : 36 שעות

3.  $\frac{1}{6}k$

4. א.  $y = 2x + k$

ב.  $S = \frac{k^2}{4} + \frac{\pi k}{4} - \frac{k}{2}$

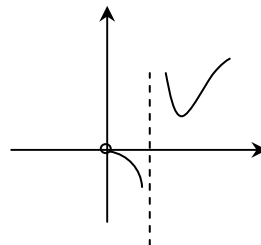
ג.  $k = -\pi$

5. א.  $x \neq k, x > 0$

ב.  $\min(2.25k^2, 6.75k^2)$

ג.  $x = k$

ד.



ה. פתרון יחיד (ראו שרטוט בנקודת המינימום)

סימולציה מס' 2  
מבחן מתכונת במתמטיקה - שאלון 006

**פרק א': אלגברה:** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

פתור אחת משאלות 1 – 2.

1. ידוע שהביטוי  $A + 17 \cdot 5^n - 9 \cdot 13^n$  מתחלק ב-8 לכל  $n$  טבעי עם שארית 2  $(0 < A < 8)$ .

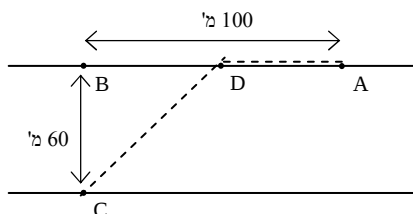
א. מצא את ערכו של  $A$ .

ב. הוכח באינדוקציה (עבור  $A$  שמצאת בסעיף א') כי עבור כל  $n$  טבעי הביטוי  $A + 17 \cdot 5^n - 9 \cdot 13^n$  מתחלק ב-8 עם שארית 2.

2. המרחק מתחנת הרכבת לשפת הים הוא 4 ק"מ. אוטובוס ותייר יצאו באותה השעה מתחנת הרכבת אל שפת הים. כעבור 10 דקות פגש התייר את האוטובוס שעשה דרכו חזרה, לאחר שהגיע לשפת הים. כשהתייר עבר  $\frac{1}{14}$  ק"מ נוספים, שוב הדביקו האוטובוס שיצא לשפת הים מיד לאחר שהגיע לתחנת הרכבת. מהירות האוטובוס והתייר אינן משתנות בזמן תנועתם. מצאו את מהירותו של כל אחד מהם.  
הערה: בפתרון הבעיה הניחו כי האוטובוס והתייר נעים ללא חניות.

**פרק ב': חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וטריגונומטריה** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.



3. יש להעביר כבל מתחנת כוח הנמצאת בנקודה  $C$  על חופו של נהר, לבית חרושת הנמצא בנקודה  $A$  בצידו השני של הנהר, כך שהכבל יעבור בחלקו בתוך המים עד נקודה  $D$ , ובחלקו האחר לאורך החוף. המרחק בין בית החרושת לבין הנקודה  $B$ , הנמצאת בדיוק מול תחנת הכוח, הוא 100 מטר. רוחב הנהר הוא 60 מטר. קצב הנחת הכבל בתוך המים הוא  $\frac{1}{130}$  מ' כבל לשניה. קצב הנחת הכבל על החוף הוא  $\frac{1}{50}$  מ' כבל לשניה.

מהו המרחק  $BD$  כדי שזמן הנחת הכבל יהיה מינימלי?

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = a \sin^3 x - 3b \sin x$  ,  $0 \leq x \leq \pi$  .

לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה בה  $x = \frac{\pi}{3}$  .

א. הראה כי  $a = 4b$  .

ב. נתון  $b > 0$  . מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון (בטאו באמצעות  $b$  במידת הצורך), וקבעו את סוגן.

ג. מהו המרחק המקסימלי בין שני המשיקים בנקודות הקיצון בתחום  $0 < x < \pi$  .

(הבע באמצעות  $a$ ).

5. משולש  $ABC$  חסום במעגל שרדיוסו  $R$  .  $BC$  הוא קוטר במעגל זה.

$D$  היא נקודה על הקוטר  $BC$  , והמשך הקטע  $AD$  חותך את המעגל בנקודה  $E$  .  
נתון :  $\angle ACB = \alpha$  ,  $\angle ADC = \beta$  .

א. בטאו את  $AD$  ואת  $DE$  באמצעות  $R, \alpha, \beta$  .

ב. נתון :  $\beta = 180 - 2\alpha$  . הוכח כי נקודה  $D$  היא מרכז המעגל.

**תשובות - שאלון 006, סימולציה מס' 2**

1. א.  $A = 2$

ב. הוכחה

2. מהירות התייר – 3 קמ"ש

מהירות האוטובוס - 45 קמ"ש

3. 25 מטר

4. א. הוכחה

ב.  $\max(\pi, 0) \quad \max(0, 0) \quad \min\left(\frac{5\pi}{6}, -b\right) \quad \min\left(\frac{\pi}{2}, b\right) \quad \min\left(\frac{\pi}{6}, -b\right)$

5. א.  $AD = \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \beta}$

או  $DE = -2R \cos(2\alpha + \beta) - \frac{R \sin 2\alpha}{\sin \beta}$   $DE = -\frac{R \sin(2\alpha + 2\beta)}{\sin \beta}$

ב. הוכחה

סימולציה מס' 1  
מבחן מתכונת במתמטיקה - שאלון 007

**פרק א': הנדסה אנליטית ווקטורים:** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  שאלה).

פתור שתיים מהשאלות 1 – 3.

1. במקבילית  $ABCD$  הגובה  $AE$  לצלע  $DC$  מונח על הישר  $2x + y - 10 = 0$ , והגובה  $AF$  לצלע  $BC$  מונח על הישר  $x + 5y - 14 = 0$ . שיעורי קודקוד  $C$  הם  $(7, 8)$ .

- א. מצא את שטח המקבילית  
ב. מצא את משוואת חוצה הזווית  $\angle ADC$

2. נתונה ההיפרבולה  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

הפונקציה עוברת בנקודה  $(\sqrt{30}, 2\sqrt{5})$ .  
המוקד הימני של ההיפרבולה הוא  $(\sqrt{125}, 0)$ .

- א. מצא את משוואת ההיפרבולה  
ב. מהו המקום הגיאומטרי של אמצעי כל הקטעים המחברים את הנקודות שנמצאות על ההיפרבולה וראשית הצירים

3. נתונה מקבילית  $ABCD$ .  
הוכח כי:

- א. לכל נק'  $K$  מתקיים  $\vec{KA} + \vec{KC} = \vec{KB} + \vec{KD}$   
ב.  $O$  הוא מפגש אלכסוני המקבילית, הוכח כי לכל נקודה  $K$  מתקיים:

$$\vec{KO} = \frac{1}{4}(\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD})$$

**פרק ב': חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וטריגונומטריה** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

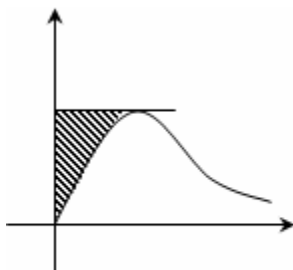
פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.

4. א. נתונים שני מספרים מרוכבים  $Z_1$  ו-  $Z_2$  הצמודים זה לזה.

הוכח כי  $\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}$  הוא מספר מדומה טהור.

ב. ללא קשר לסעיף א' -

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 4}$ ,  $x \geq 0$ .



השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק בנקודת המקסימום וציר ה-  $y$  הוא  $1 - \ln 2$ . מצא את ערכו של  $a$ .

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x + 2k}{e^x}$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הפיתול הוא  $-1$ .

- א. מצא את ערכו של  $k$ .  
ב. הוכח כי  $f(x) \leq e$  לכל  $x$ .

**תשובות - שאלון 007, סימולציה מס' 1**

1. א.  $S = 9$

ב.  $y = 1.31x + 0.45$

2. א.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$

ב.  $\frac{x^2}{6.25} - \frac{y^2}{25} = 1$

3. א. הוכחה

ב. הוכחה

4. א. הוכחה

ב.  $a = 2$

5. א.  $k = 1$

ב. הוכחה

סימולציה מס' 2  
מבחן מתכונת במתמטיקה - שאלון 007

**פרק א': הנדסה אנליטית ווקטורים:** (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  שאלה).

פתור שתיים מהשאלות 1 – 3.

1. למעגלים שמשוואותיהם  $x^2 + y^2 = 25$  ,  $x^2 + y^2 - 10x = c$  יש משיק משותף. משיק זה עובר דרך הנקודה  $(5, -10)$ . מצא את רדיוס המעגל שמרכזו אינו בראשית.

2. בטראדר  $ABCS$  :  $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$  ,  $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$  ,  $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$ .

- הנקודה  $E$  היא אמצע הקטע  $AS$ . (הנקודה  $ABC$  היא בסיס הפירמידה)  
 $\overrightarrow{SF} = t(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$  :  $F$  היא נקודה על הפאה  $BCS$  המקיימת:  
 א. מצאו מה צריך להיות ערכו של  $t$  כדי ש  $\overrightarrow{EF}$  יקביל למישור  $ABC$ .  
 ב. ידוע כי  $\overrightarrow{EF}$  ניצב ל-  $\overrightarrow{BC}$ , כמו כן  $\overrightarrow{EF}$  מקביל למישור  $ABC$ . הוכח כי משולש  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים.

3. ישר החותך את המישורים:

$$\pi_1 : (m+1)x - 3y + 4z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : x + bz - 2 = 0$$

עובר דרך הנקודה  $p(-2, 2, 2)$ .

- א. חשב את  $m$  ו-  $b$ .  
 ב. מצא את משוואת המישור העובר דרך ישר החיתוך הנ"ל ודרך ראשית הצירים.  
 ג. מצא נקודה על הישר  $\ell : \underline{x} = t(1, 2, 3)$  ,  $t > 0$ , שמרחקה מהמישור  $\pi_2$  הוא  $\sqrt{5}$ .

פרק ב', חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי וטריגונומטריה (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

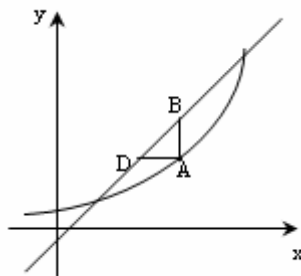
פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.

4. נתונה המשוואה  $zi + z^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$ , מספר מרוכב.

א. הוכח כי מכפלת פתרונות המשוואה הוא אפס.

ב. ללא קשר לסעיף א' נתונה המשוואה:  $z^2(z^2 + 1) = -1$ . הראה כי אם  $z$  הוא

פתרון של המשוואה אזי  $z^{12} + z^6 = 2$ .



5. הגרפים של הישר  $y = 4x$  והפונקציה  $y = \frac{1}{4}e^{2x}$

נחתכים בשתי נקודות ברביע הראשון. מנקודה  $A$  שעל

גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{4}e^{2x}$  העבירו ישרים מקבילים

לצירים, החותכים את הישר בנקודות  $B$  ו- $D$ .

מהם שיעורי הנקודה  $A$  עבורה סכום האורכים  $AB$  ו-

$AD$  יהיה מקסימלי?

בהצלחה

**תשובות - שאלון 007, סימולציה מס' 2**

1.  $R = 8$

2. א.  $t = \frac{1}{4}$

ב. הוכחה

3. א.  $b = 2, m = 1$

ב.  $x - y + 2z = 0$

ג.  $(1, 2, 3)$

4. א. הוכחה

ב. הוכחה

5.  $(1.0397, 2)$