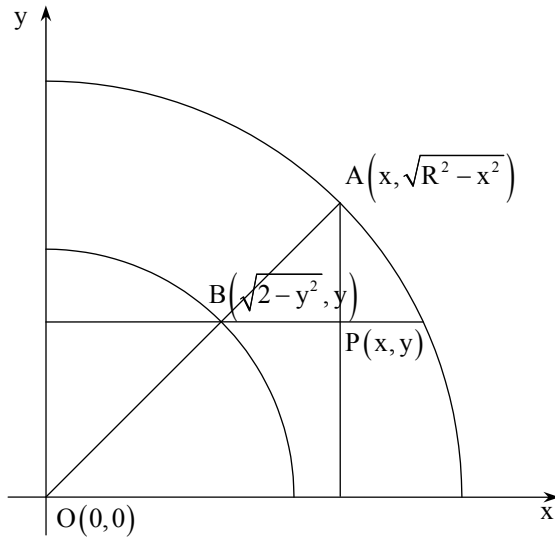


פתרונות למבחן בגרות קיץ 2008 שאלון 006



.1

.א

$$A(x, \sqrt{R^2 - x^2}) ; B(\sqrt{2 - y^2}, y)$$

$$m_{AO} = m_{BO}$$

$$m_{AO} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2} - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$$

$$m_{BO} = \frac{y - 0}{\sqrt{2 - y^2} - 0} = \frac{y}{\sqrt{2 - y^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x} \right)^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{2 - y^2}} \right)^2$$

$$\frac{R^2 + x^2}{x^2} = \frac{y^2}{2 - y^2}$$

$$x^2 y^2 = 2R^2 - 2x^2 - y^2 R^2 + y^2 x^2$$

$$2x^2 + R^2 y^2 = 2R^2 \quad / : 2R^2$$

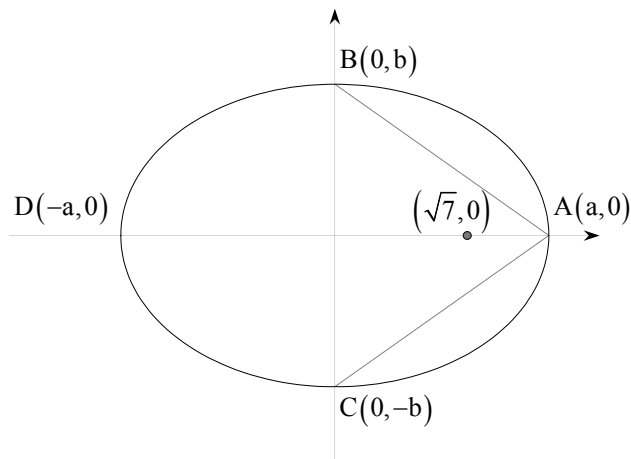
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{2} = 1 : \underline{\text{תשובה}}$$

.ב

הצורה שיצאה היא אליפסה.

.2



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

.א

$$m_{AB} = \frac{b-0}{0-a} = \frac{-b}{a}$$

$$m_{AC} = \frac{0+b}{a-0} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \angle BAC = \frac{m_{AC} - m_{AB}}{1 + m_{AC} \cdot m_{AB}}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{\frac{2b}{a}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$\frac{24a^2 - 24b^2}{a} = 14b$$

$$24a^2 - 24b^2 = 14ab \quad / : 2$$

$$12a^2 - 12b^2 = 7ab$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 7 \rightarrow a^2 - b^2 = 7$$

$$12(a^2 - b^2) = 7ab$$

$$12 \cdot 7 = 7 \cdot ab$$

$$ab = 12$$

$$\boxed{a = \frac{12}{b}}$$

$$\frac{144}{b^2} - b^2 = 7$$

$$144 - b^4 = 7b^2$$

$$b^4 + 7b^2 - 144 = 0 \quad ; \quad b^2 = t$$

$$t^2 + 7t - 144 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-7 \pm 25}{2} \left\{ \begin{array}{l} t_1 = 9 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \\ t_2 = -16 \Rightarrow b^2 = -16 \quad \emptyset \end{array} \right.$$

$$7 = a^2 - 9$$

$$a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 : \text{תשובה}$$

ב. נסמן: $F_2(-\sqrt{7}, 0)$, $F_1(\sqrt{7}, 0)$, $P(x, y)$

$$m_{PF_1} = \frac{y-0}{x-\sqrt{7}} = \frac{y}{x-\sqrt{7}}$$

$$m_{PF_2} = \frac{y-0}{x+\sqrt{7}} = \frac{y}{x+\sqrt{7}}$$

אם $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ אז מתקיים: $m_{PF_1} \cdot m_{PF_2} = -1$

$$\frac{y}{x-\sqrt{7}} = \frac{-x-\sqrt{7}}{y}$$

$$y^2 = (x-\sqrt{7})(-x-\sqrt{7})$$

$$y^2 = -x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{7}x + 7$$

$$y^2 = -x^2 + 7$$

נציב במשוואת האליפסה:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{-x^2+7}{9} = 1$$

$$9x^2 - 16x^2 + 112 = 144$$

$$-7x^2 = 32$$

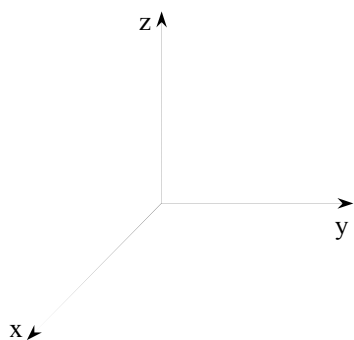
$$x^2 = \frac{32}{-7} \quad \emptyset$$

אין פתרון ולכן מתקיים: $\angle F_1PF_2 \neq 90^\circ$

תשובה: הוכחה.

.3

.א.



$$12m + d = 0 \Rightarrow d = -12$$

$$C(0, 4, 0), A(3, 0, 0), B'(3, 4, m)$$

$$ACB': (3, 0, 0) + t(-3, 4, 0) + S(0, 4, m)$$

$$A \quad B \quad C$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & m \end{vmatrix} = \begin{matrix} A = 4m \\ B = -(-3m) = 3m \\ C = -12 \end{matrix}$$

$$4mx + 3my - 12z + d = 0$$

נציב את קודקוד A כדי למצוא את d:

$$4mx + 3my - 12z - 12m = 0 \quad \text{ולכן:}$$

$$4mx + 3my - 12z - 12m = 0 \quad \text{תשובה:}$$

.ב.

$$V_{D'ACB'} = \frac{S_{ACB'} \cdot h_1}{3} = \frac{S_{ACB'} \cdot \frac{24m}{\sqrt{25m^2 + 144}}}{3} \quad ; \quad D'(0, 0, m)$$

מרחק נקודה D' מהמישור ACB'

$$h_1 = \frac{|4m \cdot 0 + 3m \cdot 0 - 12m|}{\sqrt{16m^2 + 9m^2 + 144}} = \frac{|-24 \cdot m|}{\sqrt{25m^2 + 144}} = \frac{24m}{\sqrt{25m^2 + 144}}$$

$$V_{BACB'} = \frac{S_{ACB'} \cdot h_2}{3} = \frac{S_{ACB'} \cdot \frac{12m}{\sqrt{25m^2 + 144}}}{3} \quad ; \quad B(3, 4, 0)$$

מרחק נקודה B מהמישור ACB'

$$h_2 = \frac{|4m \cdot 3 + 3m \cdot 4 - 12 \cdot 0 - 12m|}{\sqrt{16m^2 + 9m^2 + 144}} = \frac{12m}{\sqrt{25m^2 + 144}}$$

$$\frac{V_{D'ACB'}}{V_{BACB'}} = \frac{\frac{24m}{\sqrt{25m^2 + 144}}}{\frac{12m}{\sqrt{25m^2 + 144}}} = 2$$

תשובה: פי 2

.ג.

זווית בין ישר למישור: $B(3, 4, 0), B'(3, 4, m)$

המישור: $\pi: 4mx + 3my - 12z - 12m = 0$, הישר: $\ell: (3, 4, 0) + t(0, 0, m)$

$$\sin = \frac{|(0, 0, m) \cdot (4m, 3m, -12)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + m^2} \cdot \sqrt{16m^2 + 9m^2 + 144}} \Rightarrow \sin 30 = \frac{+12m}{m\sqrt{25m^2 + 144}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{\sqrt{25m^2 + 144}} \Rightarrow 24 = \sqrt{25m^2 + 144} \Rightarrow 576 = 25m^2 + 144$$

$$25m^2 = 432 \Rightarrow m^2 = 17.28 \rightarrow m = \pm 4.16$$

תשובה: $m = 4.16$

.4

$$\left| 2 + 3^{x^2-x-1} - 12i \right| > 13$$

.א.

$$\sqrt{(2 + 3^{x^2-x-1})^2 + 144} > 13$$

$$4 + 4 \cdot 3^{x^2-x-1} + 3^{2(x^2-x-1)} + 144 > 169$$

$$3^{2(x^2-x-1)} + 4 \cdot 3^{x^2-x-1} - 21 > 0$$

$$3^{x^2-x-1} = t \quad \text{נסמן}$$

$$t^2 + 4t - 21 > 0$$

$$t^2 + 4t - 21 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \quad \left\langle \begin{array}{l} t_1 = -7 \\ t_2 = 3 \end{array} \right.$$

$$t = -7$$

$$3^{x^2-x-1} = -7 \quad \emptyset$$

$$t = 3$$

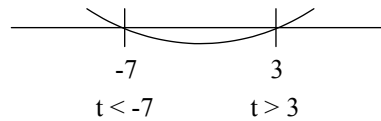
$$3^{x^2-x-1} > 3$$

$$x^2 - x - 1 > 1$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$$



תשובה: $x < -1$ או $x > 2$

.ב.

$$t = z + \bar{z}$$

$$z = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\bar{z} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$t = \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$t = 2 \cos \alpha$$

$$-2 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos \alpha \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

תשובה: $-2 \leq t \leq 2$

.5

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4e^x + 3}{(e^x - 3)^2}$$

.א.

תחום הגדרה:

$$(e^x - 3)^2 \neq 0$$

$$e^x \neq 3$$

$$\ln e^x \neq \ln 3$$

$$x \neq \ln 3$$

תשובה: $x \neq \ln 3$

.ב.

$$y = \frac{1}{3}(x \rightarrow -\infty), y = 1(x \rightarrow +\infty), x = \ln 3$$

.ג.

נקודת חיתוך עם ציר ה-x: $y = 0$

$$0 = e^{2x} + 4e^x + 3$$

נסמן: $e^x = t$

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

אין פתרון. ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

נקודות חיתוך עם ציר ה-y: $x = 0$.

$$y = \frac{e^{2 \cdot 0} + 4e^0 + 3}{(e^0 - 3)^2} = 2$$

תשובה: $(0, 2)$

.ד.

$$f(x) = \frac{(2e^{2x} + 4e^x)(e^x - 3)^2 - (e^{2x} + 4e^x + 3)(2(e^x - 3) \cdot e^x)}{(e^x - 3)^2} = 0$$

$$(e^x - 3)[(2e^{2x} + 4e^x)(e^x - 3) - 2e^x(e^{2x} + 4e^x + 3)] = 0$$

↓

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 3 \quad \emptyset$$

↓

$$2e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^{2x} - 12e^x - 2e^{3x} - 8e^{2x} - 6e^x = 0$$

$$-10e^{2x} - 18e^x = 0 \quad /: (-2)$$

$$5e^{2x} + 9e^x = 0$$

$$e^x(5e^x + 9) = 0$$

↙

$$e^x = 0 \quad \emptyset$$

↘

$$5e^x = -9$$

$$e^x = -\frac{9}{5} \quad \emptyset$$

x	0	$\ln 3$	$\ln 4$
y'	+		-
y	↗		↘

תשובה: תחום עלייה: $x < \ln 3$.
תחום ירידה: $\ln 3 < x$.

