

**פתרונות למבחן בגרות קיץ 2008 שאלון 006**

פתרון שאלה מספר 2:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} > 4^n \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n+1}$$

נבדוק עבור  $n = 2$  : צד ימין :  $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$  , צד שמאל :  $4^2 \frac{1 \cdot 2}{1+2} = 10 \frac{2}{3}$

$$12 > 10 \frac{2}{3}$$

נניח כי הטענה נכונה עבור  $n = k$  ( $k$  מספר טבעי כלשהוא גדול מ-1):

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} > 4^k \frac{1 \cdot 2 \cdots k}{k+1}$$

נוכיח כי הטענה נכונה עבור  $n = k+1$  :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cdot \frac{(2k+1) \cdot \overbrace{(2k+2)}^2}{k+1} > 4^{k+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)}{k+2}$$

$$4^k \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots k}{k+1} \cdot (2k+1) \cdot 2 > 4^{k+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)}{k+2}$$

$$\frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} > \frac{4 \cdot (k+1)}{k+2}$$

$$\frac{4k+2}{k+1} - \frac{4k+4}{k+2} > 0$$

$$\frac{(k+2) \cdot (4k+2) - (4k+2) \cdot (k+1)}{(k+1) \cdot (k+2)} > 0$$

$$\frac{\cancel{4k^2} + 2k + \cancel{8k} + \cancel{4} - \cancel{4k^2} - \cancel{4k} - \cancel{4k} - \cancel{4}}{(k+1)(k+2)} > 0$$

$$\frac{2k}{(k+1) \cdot (k+2)} > 0$$

על סמך אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים עבורם  $n > 1$ .

ב. נציב את  $n = 9$  באי שוויון שהוכחנו בסעיף א' :

$$\frac{\overbrace{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdots 18}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 18} > 4^9 \frac{1 \cdot 2 \cdots 9}{10}$$

$$\frac{10 \cdot 11 \cdots 18}{1 \cdot 2 \cdots 9} > \frac{4^9}{10}$$

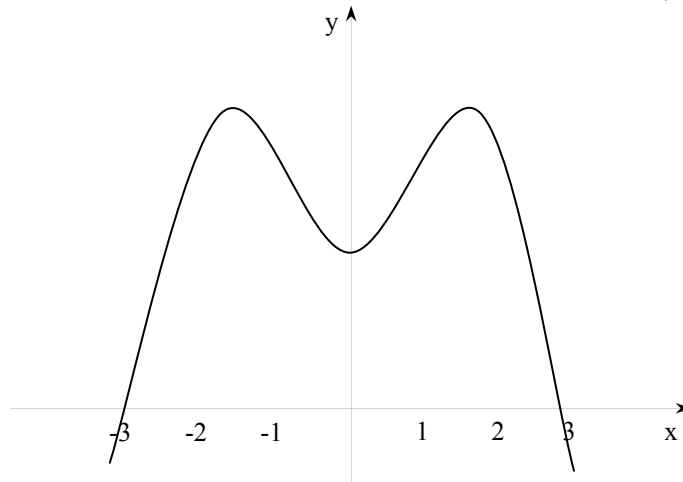
$$\frac{10^2 \cdot 11 \cdots 18}{1 \cdot 2 \cdots 9} > 4^9$$

מ.ש.ל

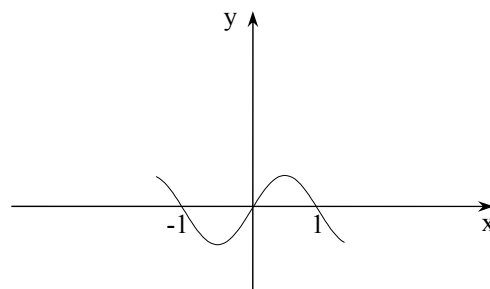
נעשה כפל בהצלבה ונקבל :

פתרון שאלה 3:

גרף של פונקציה הנגזרת  $f'(x)$ :



נקודת הקיצון של הפונקציה  $f'(x)$  הן נקודות החיתוך של  $f''(x)$  עם ציר ה- $x$ . כלומר בנקודות  $x = -1, x = 0, x = 1$



הסבר לשרטוט:

- עבור  $x < -1$   $f'(x)$  עולה ועל כן  $f''(x) > 0$ .
- עבור  $-1 < x < 0$   $f'(x)$  יורדת ועל כן  $f''(x) < 0$ .
- עבור  $0 < x < 1$   $f'(x)$  עולה ועל כן  $f''(x) > 0$ .
- עבור  $x > 1$   $f'(x)$  יורדת ועל כן  $f''(x) < 0$ .

ב. נתון כי  $f(-3) = 0$  בתחום  $-4 \leq x \leq 4$ , כדי למצוא נקודות קיצון יש לחשב מתי  $f'(x) = 0$  לפי השרטוט הנגזרת שווה ל-0 עבור  $x = -3$   $x = 3$ . כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון

נעשה טבלה:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	0	3	$3\frac{1}{2}$	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
		↘	min	↗	max	↘	

הנקודות  $x = -4$   $x = 3$  הן נקודות מקסימום, והנקודות  $x = -3$   $x = 4$  הן נקודות מינימום.

ג. כדי למצוא נקודות פיתול יש לחשב מתי  $f''(x) > 0$  לפי שרטוט הנגזרת השנייה שווה ל-0 כאשר  $x = -1$   $x = 0$   $x = 1$  כדי לקבוע תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה נעשה טבלה:

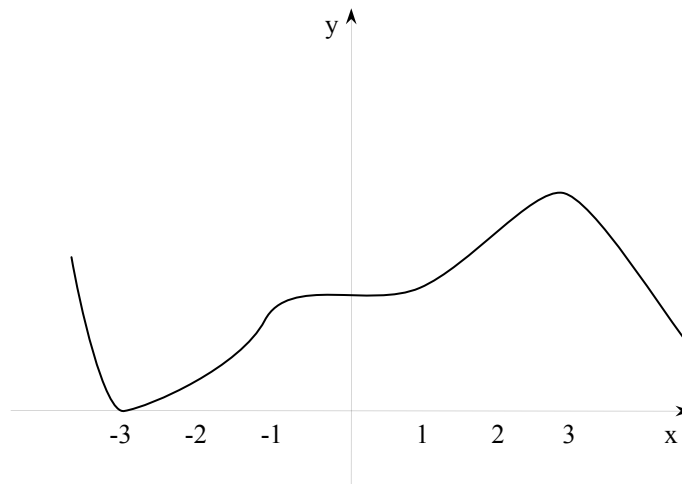
x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f''(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
		↗	max	↘	min	↗	max	↘	

$-4 < x < -1$  ,  $0 < x < 1$

$-1 < x < 0$  ,  $1 < x < 4$

קעירות כלפי מעלה:

קעירות כלפי מטה:



פתרון שאלה 4:

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$$

1. תחום הגדרה:  $x \geq 0$ .

2. אסימפטוטה אופקית  $y=0$  אין אסימפטוטה אנכית.

$$f'(x) = \frac{\frac{4 \cdot 1}{2\sqrt{x}}(x^2+3) - 4\sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2+3)^2} \quad .3$$

$$\frac{\frac{4}{2\sqrt{x}}(x^2+3) - 8x\sqrt{x}}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}}(x^2+3) - 8x\sqrt{x} = 0$$

$$2x^2 + 6 - 8x^2 = 0$$

$$-6x^2 + 6 = 0$$

$$6x^2 = 6 \quad / :6$$

$$x^2 = 1$$

$$\boxed{x=1} \quad \boxed{x=-1}$$

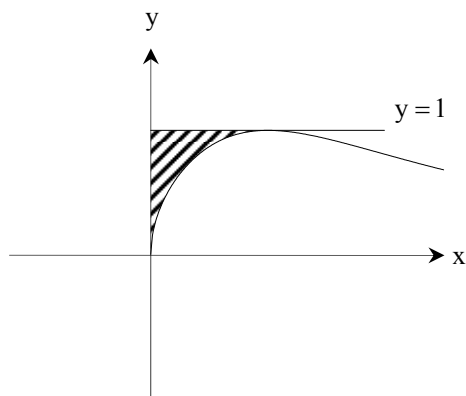
x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$		+	0	-
	min	↗	max	↘

$$\max(1,1) \quad \min(0,0)$$

כדי לשרטט את סקיצה נבדוק נקודות חיתוך עם הצירים:

$$x=0 \quad f(0) \quad (0,0)$$

$$y=0 \quad x=0$$



$$\pi \int_0^1 1 dx + \pi \int_1^0 \left( \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3} \right)^2 dx$$

$$\pi x \Big|_0^1 + \pi \int_1^0 \frac{16x}{(x^2+3)^2} dx$$

האינטגרל למציאת נפח גוף סיבוב:

נעזר באינטגרל בהצבה:

$$x^2 + 3 = t : \text{נסמן}$$

$$2x dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{16x}{t^2} \frac{dt}{2x} = \int 8t^{-2} dt = \frac{8t^{-1}}{-1} = \frac{-8}{t} = \frac{-8}{x^2+3}$$

$$\pi(1-0) + \pi \int_1^0 \frac{16x}{t^2} \frac{dt}{2x} =$$

ונקבל:

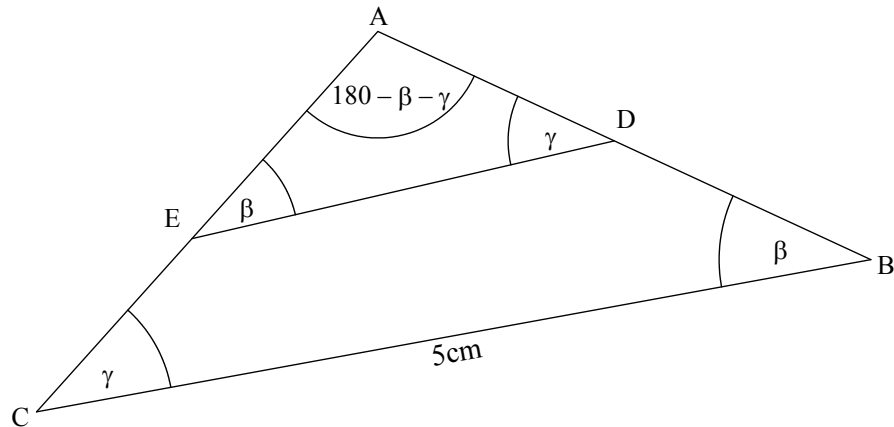
$$\pi(1-0) + \pi \frac{-8}{x^2+3} \Big|_1^0 =$$

$$\pi + \pi \left[ \frac{-8}{0^2+3} - \frac{-8}{1^2+3} \right] =$$

$$\pi + \pi \left[ \frac{-8}{3} + \frac{8}{4} \right] = \pi + \pi \left[ \frac{-2}{3} \right] = \frac{\pi}{3}$$

תשובה:  $\frac{\pi}{3}$

## פתרון שאלה 5:



$$S_{BCED} = 4 \text{ cm}^2$$

$$S_{BCED} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AED}$$

$\angle A = 180 - \beta - \gamma$  - סכום הזוויות במשולש AED שווה ל-  $180^\circ$ .

$$S_{\triangle AED} = \frac{DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(180 - \beta - \gamma)} = \frac{DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$$

שטח של משולש לפי צלע ושלוש זוויות:

$$S_{ABC} = \frac{25 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} - \frac{DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} = 4$$

$$25 \sin \beta \cdot \sin \gamma - DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 8 \sin(\beta + \gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 25 \sin \beta \cdot \sin \gamma - 8 \sin(\beta + \gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 25 \sin \beta \cdot \sin \gamma - 8(\sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot \sin \gamma)$$

$$DE^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 25 \sin \beta \cdot \sin \gamma - 8 \sin \beta \cdot \cos \gamma - 8 \cos \beta \cdot \sin \gamma \quad /: \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$DE^2 = 25 - 8 \cdot \cot \gamma - 8 \cdot \cot \beta$$

$$DE^2 = 25 - 8 \left( \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \beta} \right)$$

$$DE = \sqrt{25 - 8 \left( \frac{1}{\tan \gamma} + \frac{1}{\tan \beta} \right)}$$