

פתרונות למבחן בגרות קיץ 2008 שאלון 005

001

נתונים שני ישרים שמשוואותיהם הן :

$$\begin{cases} 3y + ax = 1 \\ ay + 3x = -1 \end{cases}$$

a הוא פרמטר.

א. מצא עבור אילו ערכי a הישרים נחתכים בנקודה אחת.

ב. מצא עבור אילו ערכי a, נקודת החיתוך של שני הישרים נמצאת מעל לישר $y = -3$ ומימין לציר ה- y.

תשובה

(א) כדי לקבל נקודת חיתוך אחת, (פתרון יחיד) דרוש :

$$\frac{3}{a} \neq \frac{a}{3} \Rightarrow 9 \neq a^2 \Rightarrow \boxed{a \neq \pm 3}$$

(ב) נפתור את המערכת ונבטא את שיעורי נקודת החיתוך באמצעות a :

$$\begin{cases} 3y + ax = 1/a \\ ay + 3x = -1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ay + a^2x = a \\ 3ay + 9x = -3 \end{cases} \Rightarrow (a^2 - 9)x = a + 3 \Rightarrow$$

$$\cancel{(a+3)}(a-3)x = \cancel{(a+3)} \Rightarrow x = \frac{1}{a-3}$$

לחישוב y, נציב את שיעור ה- x במשוואה הראשונה :

$$3y + ax = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(1 - ax) = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{a}{a-3} \right] = \frac{\cancel{a} - 3 - \cancel{a}}{3(a-3)} = \frac{-3}{3(a-3)}$$

$$y = \frac{-1}{a-3}$$

"... נקודת החיתוך של שני הישרים נמצאת מעל לישר $y = -3$ ומימין לציר ה- y .."

כלומר $x > 0$ וגם $y > -3$:

$$\frac{1}{a-3} > 0 / (a-3)^2 \Rightarrow a-3 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{a > 3}}$$

וגם :

$$\frac{-1}{a-3} > -3 \Rightarrow \frac{1}{a-3} < 3 \Rightarrow 0 < \frac{3a-10}{a-3} / (a-3)^2 \Rightarrow$$

$$0 < (a-3)(3a-10) \Rightarrow a < 3 \text{ או } 3\frac{1}{3} < a$$

סיכום : $a > 3$ וגם $a > 3\frac{1}{3}$ או $a < 3$ $\Leftarrow \boxed{a > 3\frac{1}{3}}$

002

- א. שני רוכבי אופניים, רוכב I ורוכב II, יצאו מיישוב A והגיעו ליישוב B. רוכב I עבר בשעה הראשונה 3 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר 0.2 ק"מ יותר משעבר בשעה הקודמת. רוכב II עבר בשעה הראשונה 5.75 ק"מ ובכל שעה נוספת עבר 0.3 ק"מ פחות משעבר בשעה הקודמת. רוכב I רכב שעה אחת יותר מהזמן שרכב רוכב II. מצאו את המרחק בין יישוב A ליישוב B, אם ידוע כי כל רוכב רכב מספר שלם של שעות.
- ב. רוכב III רכב מיישוב C ליישוב D, הנמצא במרחק 72 ק"מ מיישוב C. בשעה הראשונה הוא רכב 4.8 ק"מ, ובכל שעה נוספת עבר מרחק הגדול פי 2 מהמרחק שעבר בשעה הקודמת. (הוא רכב מספר שלם של שעות). כעבור כמה שעות הגיע רוכב III ליישוב D?

תשובה

(א) תנועתם של הרוכבים I ו-II מהוות, כל אחת, סדרה חשבונית.

נסמן הראשונה ב- a_n וידוע כי: $a_1 = 3$, $d_a = 0.2$.

נסמן השנייה ב- b_n וידוע כי: $b_1 = 5.75$, $d_b = -0.3$.

נתון "... רוכב I רכב שעה אחת יותר מהזמן שרכב רוכב II..". ולכן נסמן את מספר איברי הסדרה השנייה ב- n ואת מספר איברי הסדרה הראשונה ב- $n + 1$. מדובר על אותה הדרך ולכן נוכל להשוות בין הסכומים של שתי הסדרות:

$$(S_a)_{n+1} = (S_b)_n$$

$$\frac{n+1}{2} [2 \times 3 + 0.2(n+1-1)] = \frac{n}{2} [2 \times 5.75 - 0.3(n-1)]$$

$$(6 + 0.2n)(n+1) = n(11.5 - 0.3n + 0.3) \Rightarrow$$

$$0.2n^2 + 6.2n + 6 = 11.8n - 0.3n^2 \Rightarrow 0.5n^2 - 5.6n + 6 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = 10, \quad \cancel{1.2}$$

זמן הנסיעה של השני היה 10 שעות. כדי לחשב את המרחק בין היישובים נציב את $n = 10$ בנוסחת חישוב הסכום של הסדרה b_n :

$$(S_b)_{10} = \frac{10}{2} (2 \times 5.75 - 0.3 \times 9) = \underline{\underline{44 \text{ km}}}$$

המרחק בין היישובים הוא 44 ק"מ.

(ב) תנועתו של רוכב III מתארת סדרה הנדסית ובה: $a_1 = 4.8$, $q = 2$ ו- $S_n = 72$. כדי לחשב את משך השהייה בדרך נעזר בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 72 = \frac{4.8(2^n - 1)}{2 - 1} / \div 4.8 \Rightarrow 15 = 2^n - 1$$

$$16 = 2^n \Rightarrow \underline{\underline{n = 4}}$$

רוכב III עבר את המרחק ב- 4 שעות

003

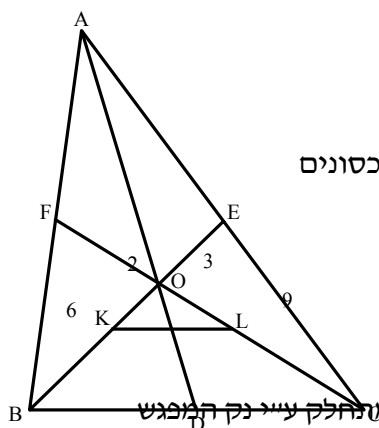
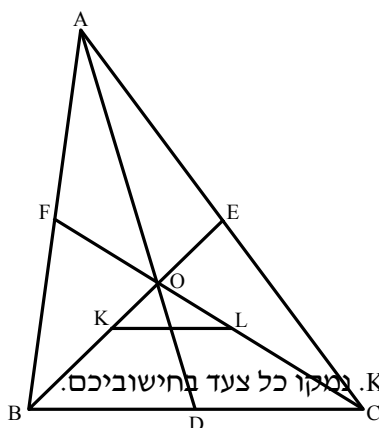
במשולש ABC, התיכונים AD, BE ו- CF נפגשים ב-O.
הנקודה L היא אמצע התיכון CF והנקודה K היא אמצע התיכון BE (ראו ציור).

א. נתון: $CF = 18$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ.
(1) חשבו את האורך של הקטע LO ואת האורך של הקטע KO. נמקו.

$$(2) \text{ חשבו את היחס } \frac{LO}{CL}$$

ב. נתון כי שטח המשולש BOD הוא 20 סמ"ר.

מצאו את שטח המשולש DOC ואת שטח המשולש KOL. נמקו כל צעד בחישוביכם.



תשובה

(1) FC - תיכון \Leftrightarrow נתון

(2) O - מפגש התיכונים \Leftrightarrow נתון

(3) $CF = 18\text{cm}$ \Leftrightarrow נתון

(4) $FO = 6\text{cm}$ ו- $OC = 12\text{cm}$ \Leftrightarrow נקודת מפגש התיכונים

במשולש מחלקת כל תיכון ל- $\frac{1}{3}$ ו- $\frac{2}{3}$.

(5) הנקודה L היא אמצע התיכון FC \Leftrightarrow נתון

(6) $LC = 9\text{cm}$ \Leftrightarrow חישוב קטעים

(7) $LO = 3$ $\Leftrightarrow LO = OC - LC$ - משל 1א

(8) $EB = 12\text{cm}$ \Leftrightarrow נתון

(9) $OE = 4\text{cm}$ ו- $OB = 8\text{cm}$ \Leftrightarrow התיכון במשולש מחלק עייני נק המפגש

ל- $\frac{1}{3}$ ו- $\frac{2}{3}$

(10) הנקודה K היא אמצע התיכון BE \Leftrightarrow נתון

(11) $BK = 6$ \Leftrightarrow חישוב

(12) $OK = 2\text{cm}$ \Leftrightarrow חיבור קטעים - משל 1א

(13) נסמן הנתונים המחושבים בשרטוט ואז:

$$(14) \frac{LO}{CL} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{ישירות משרטוט העזר} - \text{משל 2א}$$

(15) נוכיח כי מתקיים דמיון בין המשולשים OKL ו- OBC:

(16) במשולש OKL מתקיים:

$$\frac{OK}{OL} = \frac{2}{3}$$

(17) במשולש OBC מתקיים:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$(18) \frac{OK}{OL} = \frac{OB}{OC} \Leftrightarrow \text{כלל המעבר נובע מ- (16) ו- (17)}$$

$$(19) \frac{OK}{OB} = \frac{OL}{OC} \Leftrightarrow \text{פעולת כפל באלכסון.}$$

(20) הזווית KOL משותפת לשני המשולשים \Leftrightarrow משתמע מהשרטוט

$$(21) \Delta OKL \sim \Delta OBC \Leftrightarrow \text{משפט דמיון צלע זווית צלע נובע מ- (19) ו- (20)}$$

(22) להלן יחסי המיון :

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OL}{OC} = \frac{KL}{BC}$$

(23) נציב נתונים מספריים ונקבל שיחס הפרופורציה הוא :

$$n = \frac{OK}{OB} = \frac{2}{8}; \quad \underline{\underline{n = \frac{1}{4}}}$$

$$\text{נתון} \Leftrightarrow S_{BOD} = 20\text{cm}^2 \quad (24)$$

$$\text{נתון} \Leftrightarrow \text{OD - תיכון} \quad (25)$$

(26) $S_{DOC} = 20\text{cm}^2 \Leftrightarrow$ התיכון, בכל משולש מחלק את שטח המשולש לשני משולשים בעלי שטח זהה כיוון שמדובר בשני בסיסים שווים אורך ובגובה משותף.

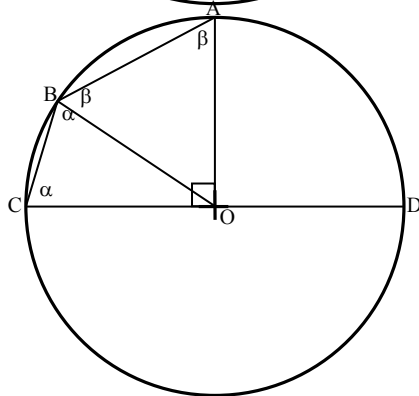
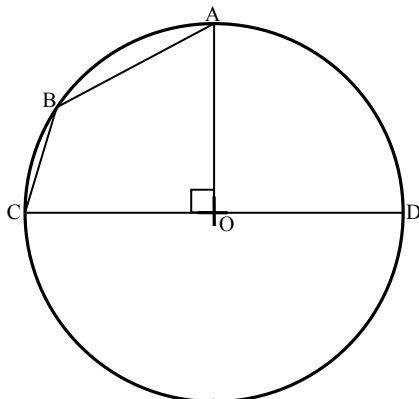
$$\text{חישוב} \Leftrightarrow S_{BOC} = 40\text{cm}^2 \quad (27)$$

$$\text{אם יחס הדמיון הוא } \frac{1}{4} \text{ אזי יחס השטחים הוא כמו יחס הדמיון בריבוע} \Leftrightarrow \frac{S_{KOL}}{S_{BOC}} = \frac{1}{16} \quad (28)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{כלומר}$$

(29) חישוב :

$$\frac{S_{KOL}}{40} = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{KOL} = \frac{40}{16} = \underline{\underline{2.5\text{cm}^2}} \quad \underline{\underline{\text{מש"לב}}}$$



004

- במעגל שמרכזו ב-O הרדיוס OA מאונך לקוטר CD (ראו שרטוט).
 א. מצאו את גודל הזווית ABC.
 נתון כי $\angle BCA = \angle BAC$
 ב. הוכח כי $BO \perp AC$
 ג. BO ו-AC נחתכים בנקודה M.
 הוכיחו כי $CM = OM$

תשובה

- (1) בנית עזר - BO - רדיוס ואז מתקבלים שני משולשים שווים שוקיים: BOA ו-BOC.
 נסמן את זוויות הבסיס שלהם ב- α ו- β (ראו שרטוט העזר).
 (2) סכום הזוויות הפנימיות במרובע ABCO הוא 360° ולכן:
 (3) חישוב:

$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow$$

$$2\alpha + 2\beta = 270^\circ / \div 2$$

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = 135^\circ}}$$

(4) הזווית ABC היא בת 135° - משל א

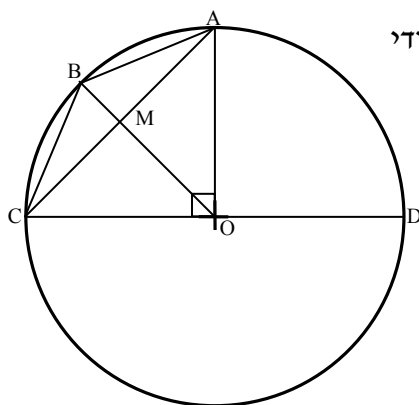
(5) $\angle BCA = \angle BAC \Leftrightarrow$ נתון

(6) $\triangle BAC$ שווה שוקיים $AB = BC \Leftrightarrow$ במשולש מול זוויות שוות צלעות שוות.

(7) $\triangle COA$ שווה שוקיים וישר זווית \Leftrightarrow בנוי משני רדיוסים מאונכים זה לזה

(8) המרובע ABCO דלתון \Leftrightarrow מרובע המורכב משני משולשים שווים שוקיים על בסיס משותף הוא דלתון. נובע מ (6) ו- (7).

(9) $BO \perp AC \Leftrightarrow$ האלכסונים בדלתון מאונכים זה לזה - משל ב



(10) $AM = MC \Leftrightarrow$ בדלתון האלכסון המחבר בין קודקודי המשש"ים חוצה את האלכסון השני

(11) $OM \perp AC$ תיכון ליתר במשולש ישר זווית AOC

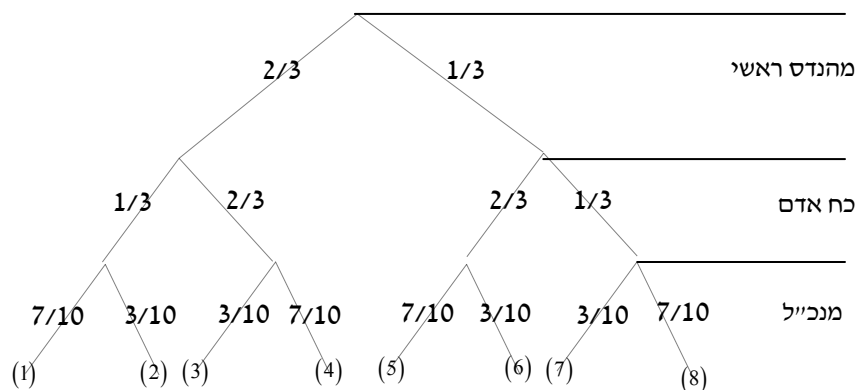
(12) $MC = OM \Leftrightarrow$ התיכון ליתר שווה למחצית היתר - מש"ל ג

במפעל מסויים כל מועמד למשרת מהנדס מרואיין על ידי שלושה בעלי תפקידים: תחילה על ידי המהנדס הראשי, אחר כך על ידי מנהל כוח האדם, ולבסוף ע"י המנכ"ל. כל אחד מבעלי התפקידים מגבש על המועמד חנות דעת חיובית או שלילית. כדי שמועמד יתקבל למשרת מהנדס, עליו לקבל חנות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חנות דעת חיובית ל- $\frac{1}{3}$ מהמועמדים למשרת מהנדס. מנהל כוח האדם קורא את חנות הדעת של המהנדס הראשי, וב- $\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חנות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. המנכ"ל קורא את חנות דעתו של מנהל כוח האדם, וב- $\frac{7}{10}$ מהמקרים נותן חנות דעת זהה לזו של מנהל כוח האדם.

- א. (1) מהי ההסתברות שמועמד למשרת מהנדס יקבל חנות דעת חיובית ממנהל כוח האדם?
 (2) ידוע כי מנהל כוח האדם נתן חנות דעת חיובית. מהי ההסתברות שהמהנדס הראשי נתן חנות דעת שלילית?
 ב. מהי ההסתברות שמועמד יתקבל למשרת מהנדס במפעל?
 ג. מהי ההסתברות שמועמד יקבל חנות דעת שלילית מהמנכ"ל?

תשובה

נתאר באמצעות "עץ" את תהליך המיון:
 הערה: נגדיר את ה"עץ" כך שבכל הסתעפות, בצד ימין נסמן ההסתברות לחו"ד חיובית ובצד שמאל ההסתברות לחו"ד שלילית:



(1א) מועמד יקבל חו"ד חיובית ממנהל כוח האדם במקרה שהמהנדס הראשי אישר או במקרה שהמהנדס הראשי דחה ולכך ההסתברות הבאות:

$$P(\text{כא מאשר}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

(2א) אם ידוע שכא אישר אז ההסתברות שהמהנדס הראשי דחה היא (מותנית)

$$P\left(\frac{\text{המהנדס דחה}}{\text{ידוע שכא אישר}}\right) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$$

(ב) ההסתברות שמועמד יתקבל היא מכפלת האירועים : מהנדס יאשר וגם כ"א יאשר וגם המנכ"ל יאשר : הקצה ה – (8) ב"עץ"

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{90}$$

(ג) ההסתברות שהמנכל ייתן חווד שלילי נתונה בקצוות ה – (1), (3), (5) ו – (7)

$$P(\text{המנכל דוחה המועמד}) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{43}{90}$$

בסקר שנערך בבית ספר תיכון נבדקה עמדת התלמידים כלפי לימוד בקבוצות לקראת מבחנים. בסקר השתתפו 900 תלמידים ומהם 400 בנות. 300 בנות תמכו בלימודים בקבוצות.

80% מהתומכים בלימוד בקבוצות היו בנות

א. מבין המשתתפים בסקר נבחר באקראי בן. מהי ההסתברות שהוא תומך בלימוד בקבוצות?
 ב. בוחרים באקראי אחד ממשתתפי הסקר. מהי ההסתברות שייבחר בן שאינו תומך בלימוד בקבוצות

ג. ידוע כי 28% מבין הבנות התומכות בלימוד בקבוצות מתנדבות לפעילות חברתית בבית הספר וכן ידוע כי 24% מבין הבנות שאינן תומכות בקבוצות לימוד מתנדבות לפעילות חברתית. דינה נבחרה באקראי מבין משתתפי הסקר. ידוע שהיא מתנדבת לפעילות חברתית בבית הספר. מהי ההסתברות שדינה תומכת בלימוד בקבוצות.

תשובה

נסמן את קבוצת הבנים ב – A ואת קבוצת התומכים ב – B.
 "... בסקר השתתפו 900 תלמידים ומהם 400 בנות..." ולכן:

$$P(\bar{A}) = \frac{400}{900} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$$

"... 300 בנות תמכו בלימודים בקבוצות..." כלומר:

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

"... 80% מהתומכים בלימוד בקבוצות היו בנות..."

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 0.80 \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.8P(B)$$

נשווה בין הביטויים שקבלנו עבור $P(\bar{A} \cap B)$:

$$\frac{1}{3} = 0.8P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{7}{12}$$

נְכַנֵּס הַנְּתוּנִים בַּטְּבֵּלָה

סֵהֵכ	\bar{A} בְּנוֹת	A בְּנִים	תִּיאֹר
$P(B)$ $\frac{5}{12}$	$P(\bar{A} \cap B)$ $\frac{1}{3}$	$P(A \cap B)$ $\frac{1}{12}$	B תוֹמְכִים
$P(\bar{B})$ $\frac{7}{12}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $\frac{1}{9}$	$P(A \cap \bar{B})$ $\frac{17}{36}$	\bar{B} מֵתִנְגָּדִים
1.0	$P(\bar{A})$ $\frac{4}{9}$	$P(A)$ $\frac{5}{9}$	סֵהֵכ

(א) ההסתברות לבן תומך מבין הבנים היא:

$$P\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{9}} = 0.15$$

(ב) ההסתברות לבן שאינו תומך:

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{17}{36} \text{ ישירות מהטבלה}$$

(ג) את המשך הסקר עושים רק עם הבנות

נסמן את קבוצת התומכות ב - C ואת קבוצת המתנדבות ב - D

בנות תומכות היו (זאת ראינו בסעיף הקודם) $\frac{1}{3}$ מ - 900 כלומר 300.

$$P(C) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\bar{C}) = \frac{1}{4}$$

"... ידוע כי 28% מבין הבנות התומכות בלימוד בקבוצת מתנדבות..."

$$P(C \cap D) = 0.28 \times \frac{3}{4} = 0.21$$

"... ידוע כי 24% מבין הבנות שאינן תומכות בקבוצת לימוד מתנדבות..."

$$P(\bar{C} \cap D) = \frac{1}{4} \times 0.24 = 0.06$$

נכנס הנתונים בטבלה:

	\bar{C} מתנגדות	C תומכות	
	0.27	$0.24 \times 0.25 = 0.06$	$0.28 \times 0.75 = 0.21$
			$0.75 - 0.21 = 0.54$
		0.25	$P(C) = 0.75$
			D מתנדבות
			\bar{D} לא מתנדבות

$$P[C/D] = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.21}{0.27} = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$$