

תרגילים לשאלון 005 מיקוד קיץ 2007

1. בסידרה הנדסית שווה סכום $(n-1)$ איבריה הראשונים ל-372. אם נחסיר מסכום n איבריה הראשונים של הסידרה הנ"ל את האיבר הראשון נקבל 186, ואם נחסיר מסכום n איבריה הראשונים של הסידרה הנ"ל את שני האיברים הראשונים נקבל 90. מצא את מנת הסידרה ההנדסית הנ"ל ואת איברה הראשון.

תשובה:

$$a_1 = 192, \quad q = \frac{1}{2}$$

2. נתון שבסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, שכל איבריה חיוביים, מתקיים:

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = m$$

$$a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots = n$$

- א. בטא את מנת הסידרה ואת האיבר הראשון שלה באמצעות m ו- n .
 ב. סכום כל איברי סידרה הנדסית אינסופית יורדת אחרת, שיש לה אותו איבר ראשון a_1 , הוא $2m$.
 הבע את מנת סידרה זו באמצעות m ו- n .

תשובה:

$$q = \sqrt{\frac{n}{m-n}}, \quad a_1 = \frac{m(m-2n)}{m-n} \quad \text{א.}$$

$$q = \frac{m}{2(m-n)} \quad \text{ב.}$$

3. האיבר ה- n של סידרה נתון על-ידי: $a_n = k \cdot t^{n-1}$ ($t \neq 1$; k - קבועים).

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

א. מצא את S_n .

ב. הוכח, כי: $(1-t)T_n + tS_n = K \cdot n$.

ג. בדוק את השוויון בסעיף ב' ישאר בתוקפו כאשר: $t = 1$.

תשובה:

$$S_n = k \frac{t^n - 1}{t - 1} \quad \text{א.}$$

ג. כן.

4. סידרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הכלל: $a_n + a_{n+1} = 3n - 5$.

נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

א. הראה כי:

$$S_{2n} = 3n^2 - 5n \quad (1)$$

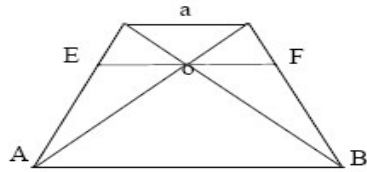
$$S_{2n+1} = a_1 + 3n^2 - 2n \quad (2)$$

ב. נתון: $a_1 = -2$.

חשב את a_{101} .

תשובה:

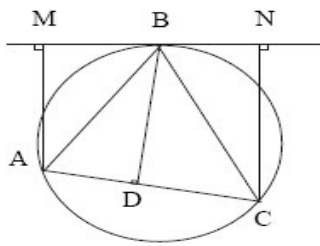
ב. $a_{101} = 148$



5. בטורף $EF \parallel AB$.

הוכח: $EO = OF = \frac{ab}{a+b}$

(a, b בסיס הטרפז).



6. משולש ABC חסום במעגל. דרך נקודה B מעבירים משיק למעגל. מהנקודות A ו-C מורידים אנכים למשיק, החותכים אותו בנקודה M, N. מהנקודה B מורידים אנך לצלע AC החותך אותה בנקודה D.

הוכח כי: $BD^2 = AM \cdot CN$



בגרות ופסיכומטרי

7.

בקוביית משחק בעלת 6 פאות, שתי פאות צבועות בכחול, פאה אחת צבועה בצהוב, ושלוש פאות צבועות בלבן. מטיילים את הקובייה 4 פעמים.
מהי ההסתברות, שמתוך 4 ההטלות נקבל בדיוק 3 פעמים פאה הצבועה בכחול, ובדיוק פעם אחת פאה הצבועה בלבן?

תשובה:

$$P = 0.07407$$

8.

ההסתברות להצליח במבחן נהיגה היא P . אם בוחרים באופן מקרי ארבעה נבחנים הניגשים למבחן, אזי ההסתברות שבדיוק שניים מהם יצליחו במבחן שווה להסתברות שבדיוק שלושה מהם יצליחו במבחן.
ארבעה אנשים ניגשו למבחן וידוע שלפחות אחד מהם הצליח. מהי ההסתברות שכל הארבעה יצליחו?

תשובה:

$$P = 0.13$$

9.

בשמורה יש 3 סוגי פרחים: יסמין, רקפת, נרקיס.
מחלה פגעה במחצית מהפרחים. המחלה פגעה ב- $\frac{3}{4}$ מפרחי יסמין, ב- $\frac{1}{2}$ מפרחי הרקפת וב- $\frac{1}{4}$ מפרחי הנרקיס.
ידוע ש- 60% מהפרחים הפגועים הם פרחי יסמין.
מהו היחס בין פרחי היסמין בשמורה לפרחי הרקפת בשמורה?

תשובה:

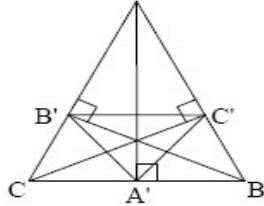
יחס 2

10. בניסוי מקרי ההסתברות למאורע A היא $P(A) = 0.7$ וההסתברות למאורע B היא

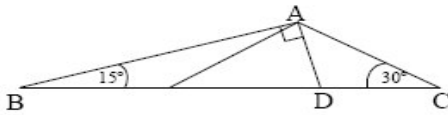
$$P(B) = 0.5$$

- הוכיחו: א. $0.7 \leq P(A \cup B) \leq 1$
ב. $0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.5$

11. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) הורידו את הגבהים AA' , BB' , CC' (ראו ציור). הוכיחו כי $B'C' \parallel BC$.



12. במשולש ABC (ראו ציור) $\angle ABC = 15^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, וכן $AD \perp AB$ ו- $BE = ED$. בטאו את שטח המשולש AED בעזרת a .



תשובה:

$$S = \frac{a^2}{16}$$

13. נתונה משפחה של פונקציות: $y = \frac{4x(mx-1)-m+2}{4}$.

עבור אילו ערכי m הגרפים חותכים את ציר ה- x בשתי נקודות שונות ושתיהן נמצאות בקטע $0 \leq x \leq 1$?

תשובה:

$$1 < m \leq 2 \text{ או } \frac{2}{3} \leq m < 1$$



בגרות ופסיכומטרי

14. נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (m+3)x + y = n+1 \\ (m-5)x + 3y = m-2 \end{cases}$$

מצא לאילו ערכי k כאשר $m+n=k$ יהיו אינסוף פתרונות

תשובה

$$k=-11$$

15. נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = (m-2)x^2 + 2mx + 2m + 3$$
$$g(x) = (25-m^2)x^2 + 1$$

הפונקציה $f(x) \cdot g(x)$ היא מכפלת הפונקציות הנתונות.
בעזרת התוצאות של סעיפים א ו-ב, מצא עבור אילו ערכי m אין לגרף הפונקציה $f(x) \cdot g(x)$ נקודות משותפות עם ציר ה- x .

תשובה: $3 < m \leq 5$, או $-5 \leq m < -2$.